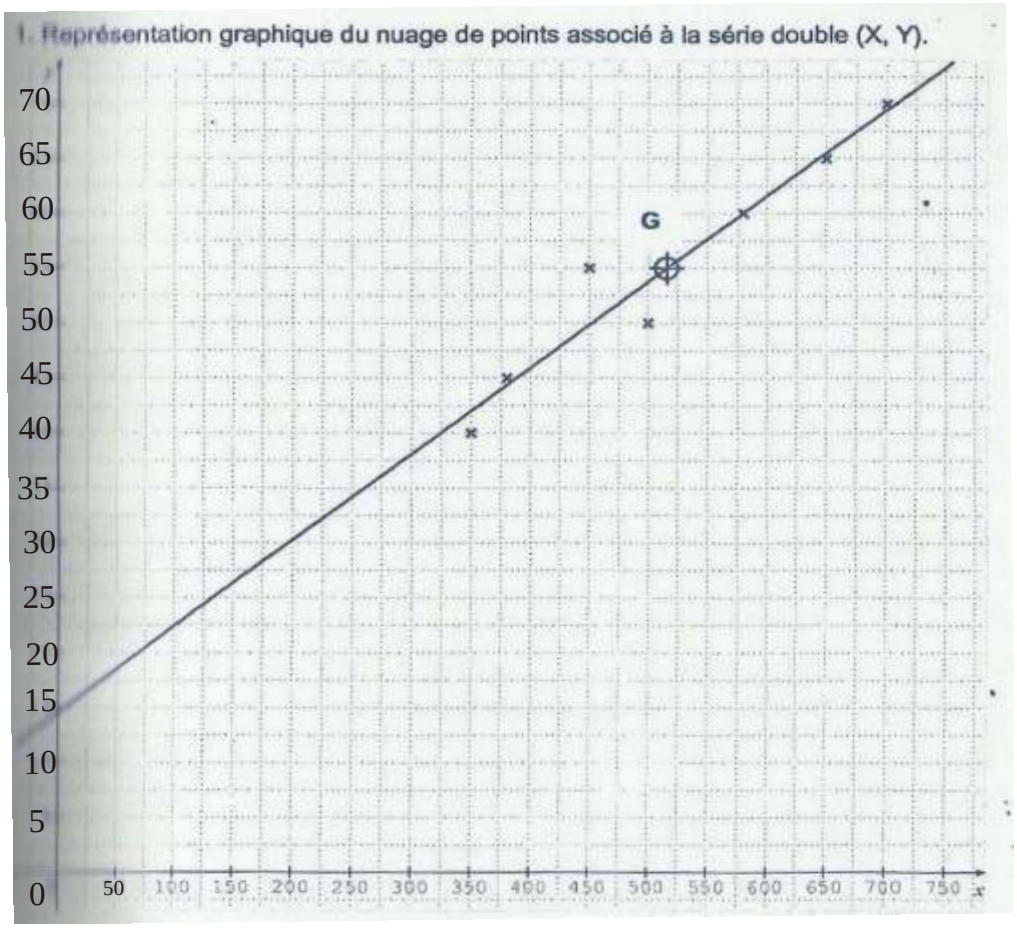
CORRECTION MATHS BAC D 2009



2.a. Calcul de $\overline{X}$ le chiffre d'affaires moyen

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{350 + 380 + 500 + 450 + 580 + 650 + 700}{7} = \frac{3610}{7} = 515{,}714$$

b. Calcul de $\overline{Y}$ le coût moyen de production

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{40 + 45 + 50 + 55 + 60 + 65 + 70}{7} = \frac{385}{7} = 55$$

3.a. Vérifions qu'un arrondi à l'entier de $\text{cov}(X,Y)$ est égal à 1193

$$\text{cov}(X,Y) = \frac{\sum Y_i . X_i}{N} - \overline{X}.\overline{Y}$$

$$= \frac{350 \text{ x } 40 + 380 \text{ x } 45 + 500 \text{ x } 50 + 450 \text{ x } 55 + 580 \text{ x } 60 + 650 \text{ x } 65 + 700 \text{ x } 70}{7} - 515{,}714 \text{ x } 55$$

$$\text{cov}(X,Y) = 1192{,}86 \simeq 1193$$

b. Justifions l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{350^2 + 380^2 + 500^2 + 450^2 + 580^2 + 650^2 + 700^2}{7} - 515{,}714^2$$

$$V(X) = 15224{,}6$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} = \frac{40^2 + 45^2 + 50^2 + 55^2 + 60^2 + 65^2 + 70^2}{7} - 55^2 \quad ; \quad V(Y) = 100$$

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{1193}{\sqrt{15224{,}6 \text{ x } 100}} = 0{,}967$$

$0{,}87 \leq |r| \leq 1$: il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y. L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4.a. Equation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X

(D) : $y = ax + b$

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{1193}{15224{,}6} = 0{,}078$$

$\bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 55 - 0{,}078 \text{ x } 515{,}714 = 14{,}593$

(D) : $y = 0{,}078x + 14{,}593$

b. Construction de (D) (voir repère ci avant).

((D) passe par le point moyen G (515,714 ; 55)) ;

Tableau de valeurs

X	515,714	0
Y	55	14,593

5. Coût de production Y de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaires de l'année 2007 est de X = 800 millions de francs.

y = 0,078 x 800 + 14,593 = 76,993 millions.

Exercice 2

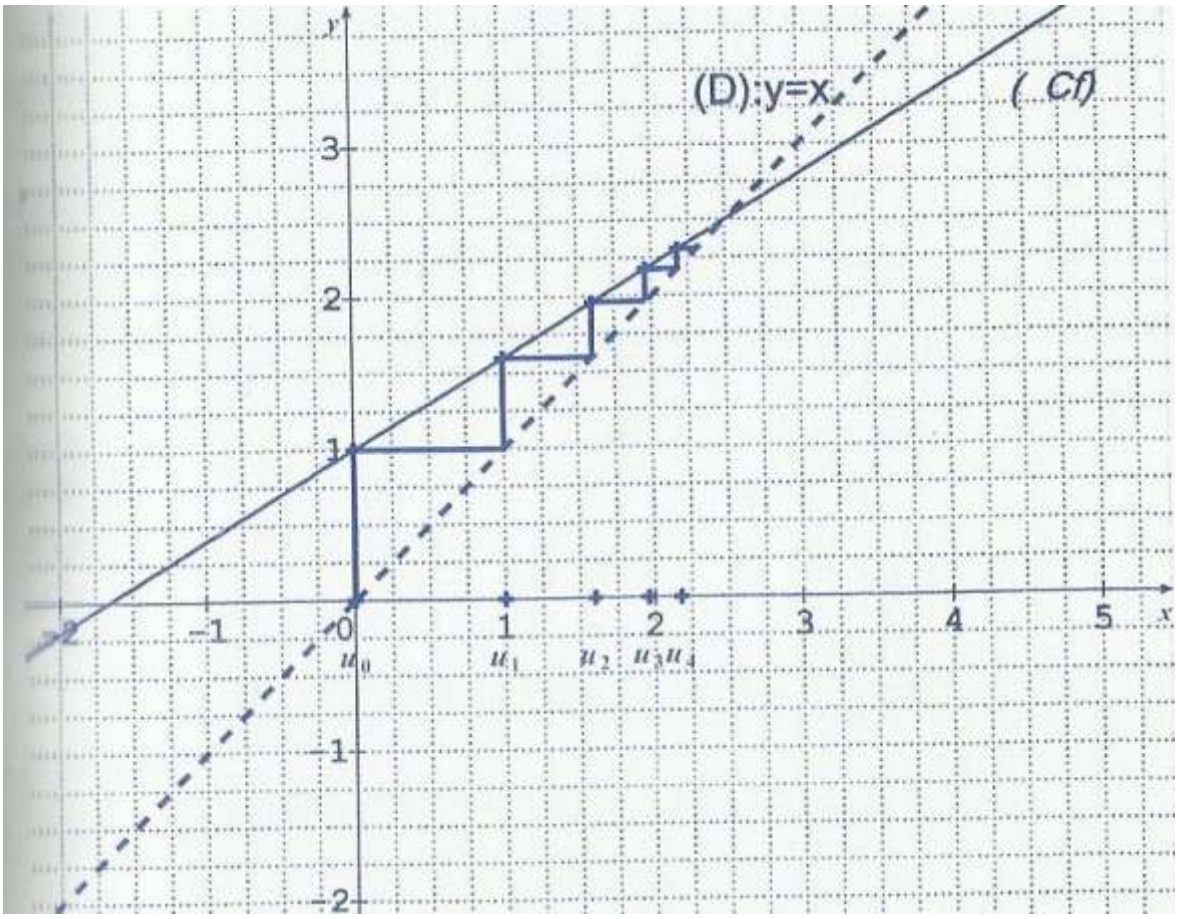
1. Représentation sur l'axe des abscisses des termes U_0 ; U_1 ; U_2 et U_3

$U_{n+1} = \frac{3}{5} U_n + 1$ On en déduit : $f(x) = \frac{3}{5}x + 1$

Tableau de valeurs

x	0	5
$f(x)$	1	4

Fomesoutra.com
ça soutra !



2.a. Démontrons par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

$U_0 = 0 < \frac{5}{2}$ donc U_0 est majorée par $\frac{5}{2}$; la propriété est vraie à l'ordre 0.

Supposons que pour tout k élément de $\mathbb{N}$, U_k est majorée par $\frac{5}{2}$.

On a : $U_k < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{5}U_k < \frac{3}{5} \times \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{5}U_k < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{5}U_k + 1 < \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow \frac{3}{5}U_k + 1 < \frac{5}{2}$

$\Rightarrow U_{k+1} < \frac{5}{2}$ donc U_{k+1} est également majorée par $\frac{5}{2}$

Finalement, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, (U_n) est majorée par $\frac{5}{2}$.

b. Démontrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(U_n) est majorée par $\frac{5}{2}$ donc (U_n) converge si elle est croissante.

Etudions les variations de la suite (U_n) .

$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{5}U_n + 1 - U_n = \frac{3}{5}U_n + 1 - \frac{5}{5}U_n = \frac{-2}{5}U_n + 1$

$U_n < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n > \frac{-2}{5} \times \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n > -1 \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n + 1 > -1 + 1 \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n + 1 > 0$

Donc $U_{n+1} - U_n > 0$, par suite (U_n) est croissante.

(U_n) est croissante et majorée donc elle est convergente.

3. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - \frac{5}{2}$

a. Démontrons que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$V_n = U_n - \frac{5}{2} \Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{5}{2} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 - \frac{5}{2}$ car $U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1$

$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{3}{5}U_n - \frac{3}{2} = \frac{3}{5}\left(U_n - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{5}V_n \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{3}{5} \Rightarrow (V_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0 = -\frac{5}{2}$

b. Exprimons V_n puis U_n en fonction de n

(V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0 = -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow V_n = V_0\, q^n \Rightarrow V_n = -\frac{5}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$

$V_n = U_n - \frac{5}{2} \Rightarrow U_n = \frac{5}{2} + V_n \Rightarrow U_n = \frac{5}{2} + \left[-\frac{5}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n\right] \Rightarrow U_n = \frac{5}{2}\left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$

c. Déterminons la limite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$

$-1 < q < 1 \Rightarrow \lim V_n = 0$ or $U_n = \frac{5}{2} + V_n \Rightarrow \lim U_n = \frac{5}{2} + \lim V_n \Rightarrow \lim U_n = \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}$

Problème

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1.a. Justifions que la limite de g en $+\infty$ est -1

On pose $X = 1 - x$

Quand x tend vers $+\infty$ X tend vers $-\infty$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{X \longrightarrow -\infty} X e^X - 1 = -1$ (car $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x e^x = 0$)

b. Déterminons la limite de g en $-\infty$

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} e^X = +\infty$

2.a. Démontrons que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

$g'(x) = \left[(1-x)e^{1-x} - 1\right]' = (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' - 1'$

$g'(x) = -e^{1-x} + (1-x)(-e^{1-x}) = (1+1-x)(-e^{1-x}) = (2-x)(-e^{1-x}) = (x-2)e^{1-x}$

$g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

b. Etudions les variations de g et donnons son tableau de variation

$g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ e^{1-x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ a le même que $(x-2)$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;2[\,,\ g'(x) < 0 & \text{D'où g est strictement décroissante sur }]-\infty;2[\\ \forall x \in]2;+\infty[\,,\ g'(x) > 0 & \text{D'où g est strictement croissante sur }]2;+\infty[\end{cases}$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-e^{-1}-1$	↗ -1

3.a. Démontrons que l'équation $x \in \mathbb{R}\ g(x) = 0$ admet une solution unique α.

- g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;2[$

$g(]-\infty;2[) =]-e^{-1}-1\,;+\infty[$ or $0 \in]-e^{-1}-1\,;+\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]-\infty;2[$

- $\forall x \in]2\,;+\infty[\ ;\ g(x) < -1 < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]2\,;+\infty[$

Finalement l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

b. Justifions que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;2[$ et en particulier sur $]0{,}4\,;0{,}5[$

$\left.\begin{matrix} g(0{,}4) = 0{,}4 \\ g(0{,}5) = -0{,}1 \end{matrix}\right\}\ g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$ donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

5. Signe de $g(x)$

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	$-e^{-1}-1$	↗ -1
Signe de $g(x)$	$+$	0	$-$	

On en, déduit que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[\,,\ g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[\,,\ g(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE B

1. Déterminons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$f(x) = x e^{1-x} - x + 2 = x\left(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1$

2.a. Démontrons que f est une primitive de g.

$f'(x) = \left(x\,e^{1-x} - x + 2\right)' = \left(x\,e^{1-x}\right)' + (-x+2)'$

$f'(x) = x'e^{1-x} + x\left(e^{1-x}\right)' + (-x+2)' = e^{1-x} + x\left(-e^{1-x}\right) - 1$

$f'(x) = (1-x)\,e^{1-x} - 1 = g(x)$

$f'(x) = g(x)$ donc f est une primitive de g.

b. Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

$f'(x) = g(x)$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de g.

or $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[\,,\ g(x) \succ 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[\,,\ g(x) \prec 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[\,,\ f'(x) \succ 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[\,,\ f'(x) \prec 0 \end{cases}$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha[$ donc f est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
		-1	
Signe de $g(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

1.a. Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -x+2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

$f(x) - (-x+2) = \left(x\,e^{1-x} - x + 2\right) - (-x+2) = x\,e^{1-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-x+2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e\,\frac{x}{e^x} = 0$ donc la droite d'équation (D) : $y = -x+2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b. Etudions la position relative de (D) et (C).

$f(x) - (-x+2) = x\,e^{1-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ e^{1-x} > 0$ donc le signe de $f(x) - (-x+2)$ est le même que celui de x

$f(x) - (-x+2) > 0 \iff x > 0$ donc (C) est au dessus de (D) sur $]0\,;+\infty[$

$f(x) - (-x+2) < 0 \iff x < 0$ donc (C) est en dessous de (D) sur $]-\infty\,;0[$

4. Démontrons que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

$\frac{f(x)}{x} = \frac{x\,e^{1-x} - x + 2}{x} = \frac{x\left(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}\right)}{x} = e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ Car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1 \Rightarrow$ (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

5. Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

(T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = g(1) = (1-1)e^{1-1} - 1 = -1$ et $f(1) = (1)e^{1-1} - 1 + 2 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

(T) : $y = -1x(x-1) + 2 = -x + 3$

6. Démontrons que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \dfrac{1}{1-\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha e^{1-\alpha} - \alpha + 2$

$g(\alpha) = 0 \iff (1-\alpha)e^{1-\alpha} - 1 = 0 \iff (1-\alpha)e^{1-\alpha} = 1 \iff e^{1-\alpha} = \dfrac{1}{1-\alpha}$

D'où $f(\alpha) = \alpha \times \dfrac{1}{1-\alpha} - \alpha + 2 = \dfrac{\alpha + (1-\alpha)(-\alpha+2)}{1-\alpha} = \dfrac{\alpha - \alpha + 2 + \alpha^2 - 2\alpha}{1-\alpha}$

$= \dfrac{2 + \alpha^2 - 2\alpha}{1-\alpha} = \dfrac{1 + \alpha^2 - 2\alpha + 1}{1-\alpha} = \dfrac{(1-\alpha)^2 + 1}{1-\alpha}$

Donc $f(\alpha) = \dfrac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha} + \dfrac{1}{1-\alpha} = 1 - \alpha + \dfrac{1}{1-\alpha}$

7. Justifions que pour tout réel x, $f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

$f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

$f(-x+2) = (-x+2)e^{1-(-x+2)} - (-x+2) + 2$; $f(-x+2) = (-x+2)e^{-1+x} + x = e^{-1+x}\left[(-x+2) + \dfrac{x}{e^{-1+x}}\right]$

$f(-x+2) = e^{x-1}\left[-x+2 + xe^{1-x}\right] = e^{x-1}\left[xe^{1-x} - x + 2\right] = e^{x-1}f(x)$

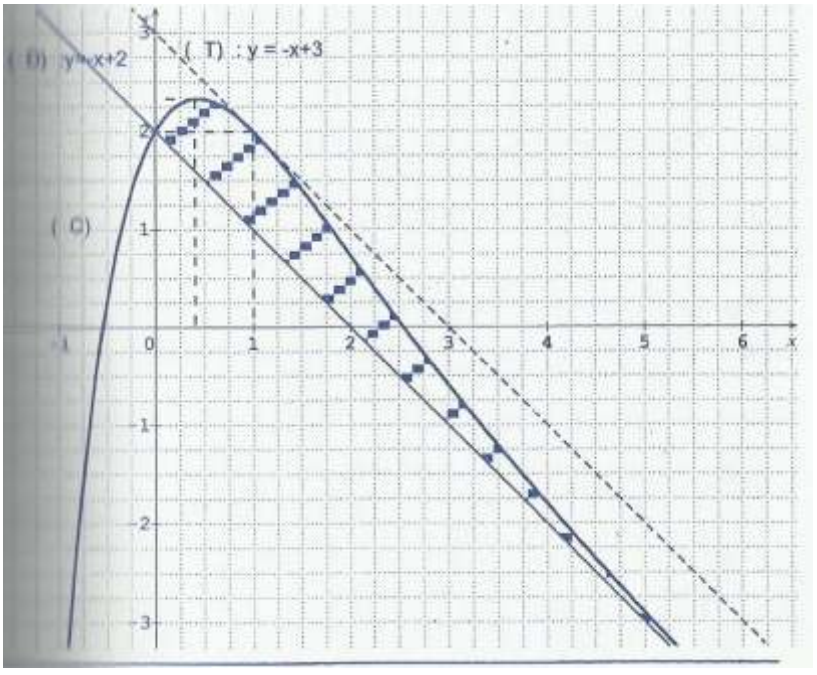
$f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

8. Démontrons que si β est l'une des solutions de l'équation $f(x) = 0$ alors $-\beta + 2$ est l'autre solution.

On sait que : $f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

β est solution de $f(x) = 0 \iff f(\beta) = 0 \iff e^{\beta-1}f(\beta) = 0 \iff f(-\beta+2) = 0 \iff -\beta + 2$ est solution de $f(x) = 0$

8. Construction de (D), (T), et (C). (On prendra $\alpha = 0{,}4$ et $\beta = 2{,}5$)



Fomesoutra.com
ça soutra !

PARTIE C

1. Calcul de $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

$f(x)-(-x+2) = x\,e^{1-x}$

$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} \left(f(x)-(-x+2) \right) dx \cdot UA$

$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} \left(x\,e^{1-x} \right) dx \cdot UA$

On pose $u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{1-x}$ $\quad v(x) = -e^{1-x}$

$$\int_0^{\lambda} \left(x\,e^{1-x} \right) dx = \left[-x\,e^{1-x} \right]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} \left(-e^{1-x} \right) dx$$

$$= \left[-x\,e^{1-x} \right]_0^{\lambda} - \left[e^{1-x} \right]_0^{\lambda} = \left[-x\,e^{1-x} - e^{1-x} \right]_0^{\lambda}$$

$$= \left[(-x-1)\,e^{1-x} \right]_0^{\lambda} = \left[(-\lambda-1)\,e^{1-\lambda} \right] - \left[(-0-1)\,e^{1-0} \right] = (-\lambda-1)\,e^{1-\lambda} + e$$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} \left(x\,e^{1-x} \right) dx \cdot UA$$

$A(\lambda) = \left[(-\lambda-1)\,e^{1-\lambda} + e \right] \text{ x } UA$ avec $UA = 2\ cm \text{ x } 2\ cm = 4\ cm^2$

$A(\lambda) = \left[(-\lambda-1)\,e^{1-\lambda} + e \right] \text{ x } 4\ cm^2$

Déterminons la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

$A(\lambda) = \left[(-\lambda-1)\,e^{1-\lambda} + e \right] \text{ x } UA = \left[(-\lambda-1)\,e^{-\lambda} \text{ x } e + e \right] \text{ x } UA$

$A(\lambda) = e\left[(-\lambda-1)\,e^{-\lambda} + 1 \right] \text{ x } UA = e\left[(-\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 \right] \text{ x } UA$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = e \text{ x } UA = e \text{ x } 4\ cm^2 = 4e\ cm^2 = 10{,}872\ cm^2$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} -\lambda\,e^{-\lambda} = \lim\limits_{X \to -\infty} X e^{X} = 0 \quad (\text{en posant } X = -\lambda) \\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0 \end{cases}$