

CORRIGE

Exercice 1 2 points

1. VRAI ; 2. FAUX ; 3. FAUX ; 4. VRAI $\longrightarrow$

0,5pts $\times$ 4**Exercice 2** 2 points

1. B 2. B 3. C 4. C $\longrightarrow$

0,5pts $\times$ 4**Exercice 5** 5 points

Partie A : g dérivable sur $]1; +\infty[$ et définie par $g(x) = 4x\sqrt{x-1} - 1$

1. Démontrons que g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. $\longrightarrow$

0,5pts

g est dérivable sur $]1; +\infty[$ et, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $g'(x) = 4\left(\sqrt{x-1} + \frac{x}{\sqrt{x-1}}\right) > 0$.

Conclusion : g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

2. Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1,05; 1,06[$. $\longrightarrow$

0,5pts

$g(1,05) = -0,06$ et $g(1,06) = 0,04$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$, en particulier sur $]1,05; 1,06[$. De plus, $g(1,05) \times g(1,06) < 0$.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1,05; 1,06[$.

3. Justifions que : $\forall x \in]1; \alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$. $\longrightarrow$

0,5pts

g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$, et $g(\alpha) = 0$, donc :

- Pour tout $x \in]1; \alpha[$, on a $x < \alpha$, donc $g(x) < g(\alpha)$; c'est-à-dire $g(x) < 0$.
- Pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, on a $x > \alpha$, donc $g(x) > g(\alpha)$; c'est-à-dire $g(x) > 0$.

Conclusion : $\forall x \in]1; \alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B : Etude de la fonction f défini sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - \sqrt{x-1}$.

1. Calculons la limite de f en $+\infty$ et celle $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. $\longrightarrow$

0,25pts $\times$ 2

Pour tout $x \geq 1$:

$$\square \quad f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x-1}}{x^2}\right) = x^2 \left(1 - \sqrt{\frac{x-1}{x^4}}\right) = x^2 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}\right), \text{ donc : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\square \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - \sqrt{x-1}}{x} = x - \frac{\sqrt{x-1}}{x} = x - \sqrt{\frac{x-1}{x^2}} = x - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}, \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$$

Inter-Graph $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$

0,25pts

2. Etude de la dérivabilité de f en 1 $\longrightarrow$

0,5pts

Pour tout $x \geq 1$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4x \times \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{x-1}$, donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty}$

Conclusion : f n'est dérivable en 1

Inter-Graph $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 1

0,25pts

3. On admet que f est dérivable sur $]1; +\infty[$.

a) Justifions que pour tout x élément de $]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x-1}}$. → 0,25pts

Pour tout $x > 1$, $f'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{4x\sqrt{x-1} - 1}{2\sqrt{x-1}}$, donc $\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x-1}}}$

b) Etudions les variations de f . → 0,5pts

Pour tout $x > 1$, on a $2\sqrt{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

Ainsi : $\forall x \in]1; \alpha[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]1; \alpha[\text{ et strictement croissante sur }]\alpha; +\infty[}$

Tableau de variation de f . → 0,25pts

x	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	-		+
$f(x)$	-1	$f(\alpha)$	$+\infty$

4. Démontrons que $f(\alpha) = \frac{4\alpha^3 - 1}{4\alpha}$. → 0,25pts

On a : $f(x) = x^2 - \sqrt{x-1}$, donc naturellement $f(\alpha) = \alpha^2 - \sqrt{\alpha-1}$.

Or $g(\alpha) = 4\alpha\sqrt{\alpha-1} - 1 = 0$, d'où : $\sqrt{\alpha-1} = \frac{1}{4\alpha}$. Ainsi : $\boxed{f(\alpha) = \alpha^2 - \frac{1}{4\alpha} = \frac{4\alpha^3 - 1}{4\alpha}}$

5. a) Justifions que h est une bijection. → 0,25pts

h est continue et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$, avec $h([\alpha; +\infty[) = [f(\alpha); +\infty[$

Conclusion : $\boxed{h \text{ est une bijection de } [\alpha; +\infty[\text{ sur } K = [f(\alpha); +\infty[}$

b) Calculons $h(2)$. → 0,25pts

$h(2) = f(2) = 2^2 - \sqrt{2-1} = 4 - 1 = 3$; $\boxed{h(2) = 3}$

c) Justifions que h^{-1} est dérivable en 3 puis calcule $(h^{-1})'(3)$. → 0,5pts

h est dérivable en $h(2)$ et $h'(2) = \frac{g(2)}{2} = 7 \neq 0$, donc h^{-1} est dérivable en $h(2)$,

donc en 3. Et on a : $\boxed{(h^{-1})'(3) = \frac{1}{h'[h^{-1}(3)]} = \frac{1}{h'(2)} = \frac{1}{7} ; (h^{-1})'(3) = \frac{1}{7}}$

Exercice 4

4 points

Dans l'association :

- 1/4 des femmes adhèrent à la section handball, donc $p_F(B) = 1/4$
- 1/3 des hommes adhèrent à la section handball, donc $p_{\bar{F}}(B) = 1/3$
- 30% des membres adhèrent à la section handball, soit $p(B) = 3/10$

Partie A

1. a) Démontrons que $p(F) = \frac{2}{5}$. $\longrightarrow$

0,5pts

$$\text{On a : } p(B) = p(F \cap B) + p(\bar{F} \cap B)$$

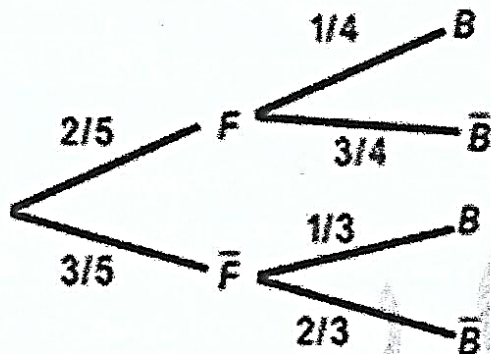
$$p(B) = p(F) \times p_F(B) + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(B).$$

$$\text{Soit } p(F) = x, \text{ on a : } p(\bar{F}) = 1 - x ; \text{ D'où l'égalité : } \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}(1-x) = \frac{3}{10},$$

$$\text{soit } x = \frac{12}{30} = \frac{6 \times 2}{6 \times 5} ; \text{ ainsi } \boxed{x = p(F) = \frac{2}{5}}$$

b) Dédisons-en l'arbre de probabilité traduisant cette situation. $\longrightarrow$

0,5pts



2. Il s'agit de calculer $p_B(F)$

$$\text{On a : } \boxed{p_B(F) = \frac{p(F \cap B)}{p(B)}} \longrightarrow$$

0,5pts

$$\text{Soit : } p_B(F) = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3} ; \text{ donc } \boxed{p_B(F) = \frac{1}{3}} \longrightarrow$$

0,5pts

Partie B

1. Justifie que la probabilité de l'évènement G est $\frac{2}{33}$.

$$\text{Soit } \Omega, \text{ l'univers associé ; } \text{Card}(\Omega) = C_{100}^2 = 4950.$$

$$\text{Card}(G) = C_{25}^2 = 300, \text{ donc : } \boxed{p(G) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{300}{4950} = \frac{2}{33}} \longrightarrow$$

0,5pts

2. Déterminons la loi de probabilité de X .

▪ Les valeurs prises par X sont : -500 ; 1500 et 3500 $\longrightarrow$

0,25 pts

$$\circ p(X = -500) = \frac{C_{75}^2}{C_{100}^2} = \frac{2775}{4950} = \frac{37}{66} ; \boxed{p(X = -500) = \frac{37}{66}}$$

$$\circ p(X = 1500) = \frac{C_{25}^1 \times C_{75}^1}{C_{100}^2} = \frac{1875}{4950} = \frac{25}{66} ; \boxed{p(X = 1500) = \frac{25}{66}} \longrightarrow$$

0,5pts

$$\circ p(X = 3500) = \frac{C_{25}^2}{C_{100}^2} = \frac{300}{4950} = \frac{2}{33} = \frac{4}{66} ; \boxed{p(X = 3500) = \frac{2}{33}}$$

▪ La loi de probabilité de X : ----->

$X = x_i$	-500	1500	3500
$p(X = x_i)$	37/66	25/66	2/33

3. **Justifions qu'en moyenne, chaque joueur gagne 500 francs.**

Il s'agit de montrer que $E(X) = 500$.

$$E(X) = \sum_i x_i p(X = x_i)$$

$$E(X) = -500 \times \frac{37}{66} + 1500 \times \frac{25}{66} + 3500 \times \frac{4}{66} ;$$

$$E(X) = \frac{-500 \times 37 + 1500 \times 25 + 3500 \times 4}{66} = \frac{33000}{66}$$

$$E(X) = 500$$

0,5pts

EXERCICE 3 3 points

1. Déterminons D_f —————→

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

2. Justifions que (C) admet deux asymptotes —————→

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $-\infty$

* $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$, donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3. Démontrons que (C) admet une branche parabolique dont on précise ici —————→

0,5 pts x 4

on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc (C) admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$.

4. Déterminons les images des intervalles suivants —————→

$$f(]-\infty; 1]) =]-2; -1] ; f([1; 2[) =]-\infty; -1]$$

$$f(]2; +\infty[) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}.$$

5-

Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$. —————→

f est continue et strictement croissante sur $]2; +\infty[$ et $f(]2; +\infty[) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $]2; +\infty[$

6- Démontrons que $\forall n \in]-\infty; 2[\cup]2; \alpha[, f(n) < 0$
et $\forall n \in]\alpha; +\infty[, f(n) > 0$

on a $\forall n \in]-\infty; 2[\cup]2; \alpha[, n < \alpha \Rightarrow f(n) < f(\alpha)$
or $f(\alpha) = 0$ donc $f(n) < 0$

$\forall n \in]\alpha; +\infty[, n > \alpha \Rightarrow f(n) > f(\alpha)$ or $f(\alpha) = 0$
donc $f(n) > 0$

EXERCICE 6 5 pts

Solution :

- ✓ Pour répondre à la préoccupation de Dago, je vais utiliser les probabilités.
- ✓ J'utilise les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales

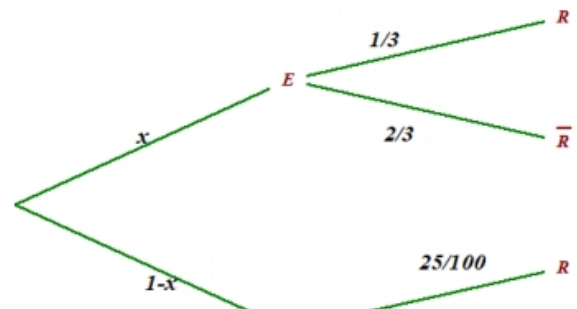
Modélisation du problème :

- E l'événement « l'élève choisi est en classe de terminale D » ;
- R l'événement « l'élève choisi aime jouer au damier » ;
- P(E) la probabilité de l'événement E.

*Je traduis cette situation par un arbre de probabilités ;

*Je détermine p(E).

Pour ce faire, posons $x = P(E)$



On a les probabilités suivantes :

$$P(\bar{E})=1-x ; P_E(R)=\frac{1}{3} ; P_E(\bar{R})=\frac{2}{3} ; P_{\bar{E}}(R)=\frac{25}{100} \text{ et } P_{\bar{E}}(\bar{R})=\frac{75}{100} .$$

En utilisant la formule des probabilités totales, on a :

$$P(R) = P(R \cap E) + P(R \cap \bar{E}) ; \text{ comme } P(R) = \frac{3}{10} ,$$

$$\text{alors } \frac{3}{10} = \frac{1}{3} x + \frac{25}{100} (1-x) \text{ d'où } x = \frac{3}{5} .$$

$$\text{Donc finalement } p(E) = \frac{3}{5}$$

Je réponds à la préoccupation de Dago

la proportion des élèves de la de terminale D est 60 %.