

1. 13. Approcher $\ln(1+x)$, Antilles 2004

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Soit a dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$; on note $I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a .

2. A l'aide d'une intégration par partie, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a .

3. A l'aide d'une intégration par partie, démontrez que $I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$. Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.

5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculez $J(a)$.

6. a. Démontrez que pour tout $t \in [0 ; a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

b. Démontrez que pour tout $a \in [0 ; +\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0 ; +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Correction

$$1. I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^a = \ln(1+a) - \ln 1 = \ln(1+a).$$

$$2. I_1(a) = \int_0^a \frac{(t-a)dt}{(1+t)^2} : \text{intégration par parties, on pose } \begin{cases} u(t) = t-a \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{-1}{1+t} \end{cases} \text{ et}$$

$$I_1(a) = \left[\frac{-1(t-a)}{1+t} \right]_0^a - \int_0^a \frac{-dt}{(1+t)^2} = -a + I_0(a) = \ln(1+a) - a.$$

3. Encore une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(t) = (t-a)^{k+1} \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^{k+2}} \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} u'(t) = (k+1)(t-a)^k \\ v(t) = \int \frac{1}{(1+t)^{k+2}} dt = \frac{1}{-k-2+1} (1+t)^{-k-2+1} = \frac{-1}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \end{cases},$$

$$\text{d'où } I_{k+1}(a) = \left[\frac{-(t-a)^{k+1}}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \right]_0^a + \int_0^a \frac{(k+1)(t-a)^k}{(k+1)(1+t)^{k+1}} dt = \frac{(-a)^{k+1}}{k+1} + \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a).$$

4. Soit $P(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$; calculons $I_5(a)$ à l'aide de l'égalité précédente :

$$\text{pour } k = 1 : I_2(a) = \frac{(-1)^2 a^2}{2} + I_1(a) = \frac{a^2}{2} + \ln(1+a) - a,$$

$$\text{pour } k = 2 : I_3(a) = \frac{(-1)^3 a^3}{3} + I_2(a) = -\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + \ln(1+a) - a,$$

$$\text{pour } k = 3 : I_4(a) = \frac{a^4}{4} + I_3(a) = \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + \ln(1+a) - a,$$

$$\text{pour } k = 4 : I_5(a) = \frac{-a^5}{5} + I_4(a) = \frac{-a^5}{5} + \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + \ln(1+a) - a = \ln(1+a) - P(a).$$

$$5. J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt = \left[\frac{(t-a)^6}{6} \right]_0^a = -\frac{a^6}{6}$$

6. a. Comme $t \leq a$, on a $t - a \leq 0 \Rightarrow (t - a)^5 \leq 0$ d'où $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^6} \leq 1 \Leftrightarrow (1+t)^6 \geq 1$ ce qui est évidemment vrai (remarquez les deux changements de sens des inégalités...).

b. On a $(t-a)^5 \leq \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}$ donc en intégrant sur l'intervalle $[0; a]$: $\int_0^a (t-a)^5 dt \leq \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt$ d'où $J(a) \leq I_5(a)$;

de plus $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leq 0$ et l'intégrale d'une fonction négative sur un intervalle dont les bornes sont rangées dans le

sens croissant est négative donc $\int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \leq 0$, d'où $\int_0^a (t-a)^5 dt \leq \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \leq 0$.

7. On a d'après 4. $|\ln(1+a) - P(a)| = |I_5(a)| \leq \left| \int_0^a (t-a)^5 dt \right| = \frac{a^6}{6}$ (l'inégalité du 6.b. devient

$\left| \int_0^a (t-a)^5 dt \right| \geq \left| \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \right|$ du fait du changement de signe).



8. Il suffit de prendre $\frac{a^6}{6} \leq 10^{-3}$, soit $a \leq \sqrt[6]{6 \cdot 10^{-3}} \approx 0,426$.

Moralité : pour x dans $[0; \sqrt[6]{6 \cdot 10^{-3}}]$, on approche $\ln(1+a)$ par $P(a)$ avec une erreur maximale de 0,001. Ceci est très utile pour calculer les valeurs des logarithmes.

1. 14. Suite intégrales, France 2006

5 points

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{1-x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour C peut-on en tirer ?

b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f' .

c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe C .

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

a. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n .

b. Calculer I_1 , puis I_2 .

c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1.

c.

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.

b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction

5 points

1. a. $f(x) = x^2 e^{1-x}$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$ car les deux termes tendent vers $+\infty$.

En $+\infty$, les croissances comparées permettent de dire que l'exponentielle fait tendre f vers 0. On a alors une asymptote horizontale $y = 0$.

b. f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}$.

c. Comme l'exponentielle est positive, f' est du signe de $x(2-x)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f	$+\infty$	0	$4e^{-1}$	0

La représentation graphique est laissée au lecteur.

2. a. Faisons une intégration par parties : $\begin{cases} u = x^{n+1} \\ v' = e^{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = (n+1)x^n \\ v' = -e^{1-x} \end{cases}$ d'où

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx = \left[-x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x} dx = -1e^0 + 0 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx = -1 + (n+1)I_n.$$

b. $I_1 = \int_0^1 x^1 e^{1-x} dx = \left[-e^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = -1 + e + \left[-xe^{1-x} \right]_0^1 = e - 2$; par application de la formule de récurrence, on trouve : $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(e - 2) = 2e - 5$.

Remarque : on aurait pu faire calculer $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx = \left[-e^{1-x} \right]_0^1 = -1 + e$ puis appliquer la formule de récurrence : $I_1 = -1 + I_0 = -1 + (e - 1) = e - 2 \dots$ on aurait évité une deuxième intégration par parties...

c. Aire entre la courbe de f , l'axe horizontal, $x = 0$ et $x = 1$.

3. a. $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1 \Leftrightarrow x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ car $x^n > 0$.

b. On intègre l'inégalité entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx \Leftrightarrow \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq e \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} ;$$

donc I_n tend vers 0 grâce à nos amis les gendarmes...

1.15. Intégrale et suite 5

Pour tout entier naturel n , on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$.

1. Calculer I_0 et J_0

2. En intégrant par parties I_n puis J_n montrer que
$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}.$$

3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n .

4. Déterminer la limite de I_n et celle de J_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction

$$1. I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \quad J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$



2. On pose par exemple
$$\begin{cases} u = e^{-nx} \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -ne^{-nx} \\ v = -\cos x \end{cases} \text{ d'où}$$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx = \left[-e^{-nx} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ne^{-nx} \cos x dx = 1 - nJ_n \Leftrightarrow I_n + nJ_n = 1$. On procède de même pour la deuxième intégrale.

3. On résoud facilement le système :
$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -n^2 I_n + nJ_n = ne^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow (1+n^2)I_n = 1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow I_n = \frac{1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2} \text{ puis}$$

$$\begin{cases} nI_n + n^2 J_n = n \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow (1+n^2)J_n = n + e^{-n\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}.$$

4. L'exponentielle l'emporte toujours, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1-0}{1+\infty} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = 0$.