

1. 16. Méthode d'Euler, Am. du Nord 2006

7 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On s'intéresse aux fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ vérifiant les conditions :

(1) pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$, $f'(x) = 4 - [f(x)]^2$;

(2) $f(0) = 0$.

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A : étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f , on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2. On obtient ainsi une suite de points notés (M_n) , d'abscisse (x_n) et d'ordonnée (y_n) telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0, x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0, y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 \end{cases}$$

1. a. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau ci-dessous. Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8000	1,4720					

b. Placer sur le graphique donné en annexe les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.

c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2. a. Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $p(x) \in [0; 2]$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq y_n \leq 2$.

c. Etudier le sens de variation de la suite (y_n) .

d. La suite (y_n) est-elle convergente ?


Fomesoutra.com
ga soutra !
Docs à portée de main

Partie B : étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 2 \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$ et (C_g) sa courbe représentative.

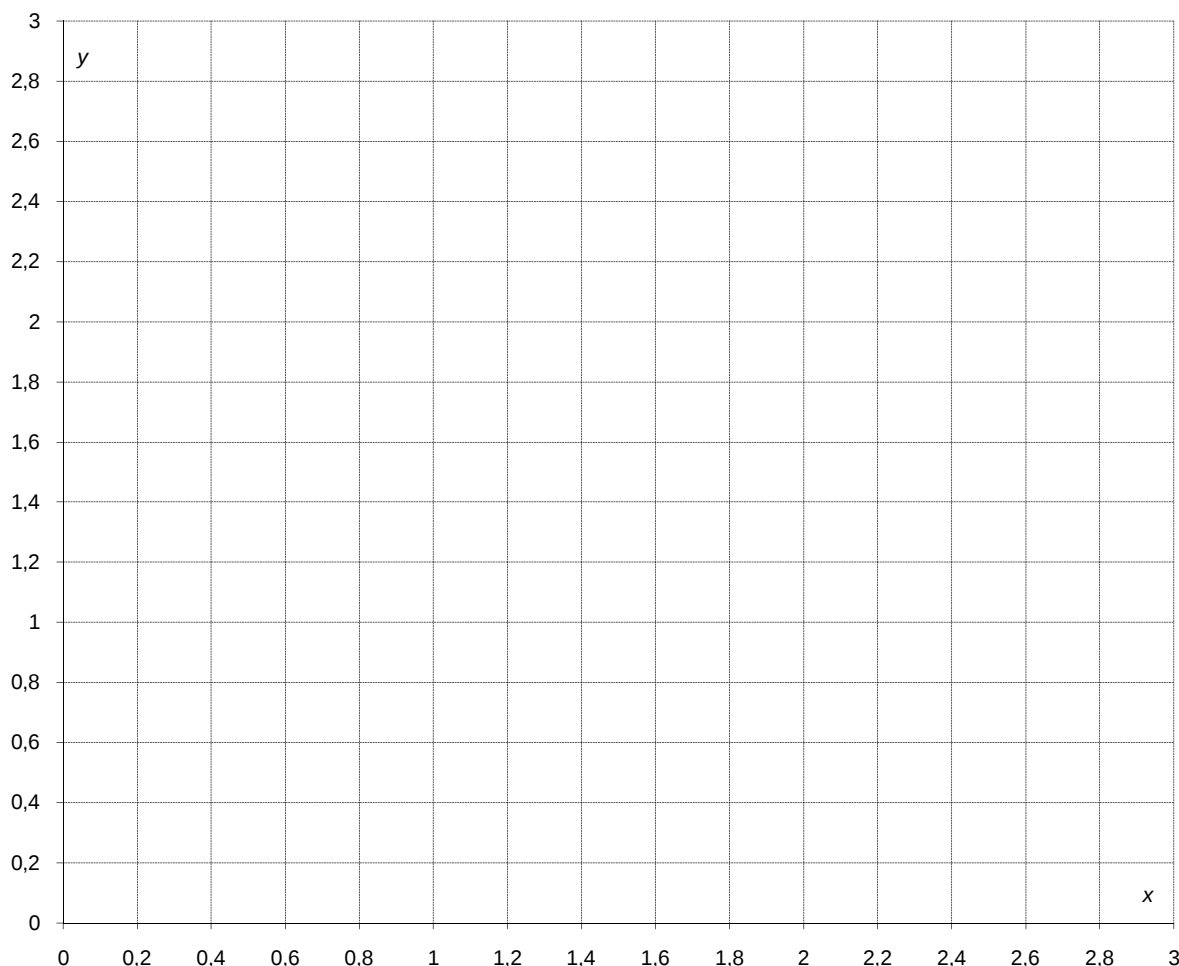
1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. a. Montrer que (C_g) admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

b. Etudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à (C_g) à l'origine.

4. Tracer dans le repère la courbe (C_g) et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.



Correction

Partie A : étude d'une suite

1. a.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
y_n	0	0,8000	1,4720	1,8386	1,9625	1,9922	1,9984	1,9997

b. Voir ci-dessous

c. La suite (y_n) semble croissante et converger vers 2.

2. a. $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$, $p'(x) = -0,4x + 1$ qui est positif lorsque $x < \frac{1}{0,4} = 2,5$. Donc p est croissante de $[0; 2]$ vers $[p(0); p(2)] = [0,8; 2] \subset [0; 2]$.

b. On a par récurrence $y_0 = 0 \in [0; 2]$; par ailleurs si $y_n \in [0; 2]$ alors $y_{n+1} = p(y_n) \in [0; 2]$ avec ce qu'on a dit en 2. a.

c. $y_1 = 0,8 > y_0$; par récurrence on a alors $p(y_1) > p(y_0) \Leftrightarrow y_2 > y_1$, etc. En appliquant p autant de fois que nécessaire on a $y_{n+1} > y_n$ (notez que c'est uniquement le fait que $y_1 = 0,8 > y_0$ qui rend la suite croissante, si c'était le contraire, $y_1 < y_0$ alors la suite serait décroissante...).

d. La suite (y_n) est croissante et majorée par 2, elle converge ; sa limite est le point fixe de p dans $[0; 2]$, à savoir 2.

Partie B: étude d'une fonction

$$1. g(0) = 2 \frac{e^{4 \times 0} - 1}{e^{4 \times 0} + 1} = 0 ; g'(x) = 2 \frac{4e^{4x}(e^{4x} + 1) - 4e^{4x}(e^{4x} - 1)}{(e^{4x} + 1)^2} = 16 \frac{e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2} ;$$

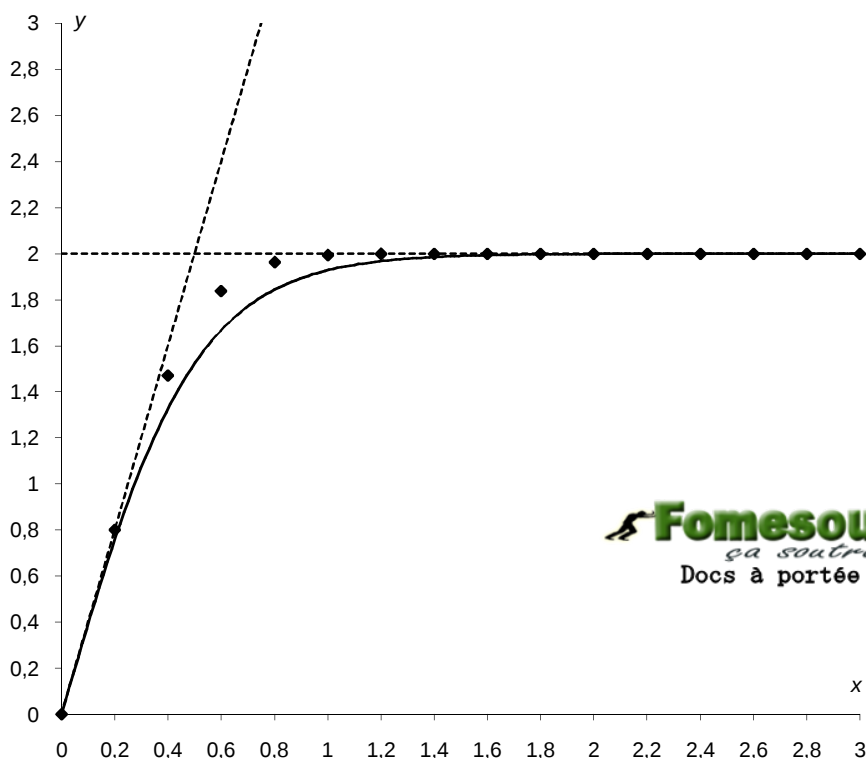
$$\text{par ailleurs } 4 - [g(x)]^2 = 4 - 4 \frac{(e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2} = 4 \frac{(e^{4x} + 1)^2 - (e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2} = 4 \frac{2e^{4x} \times 2}{(e^{4x} + 1)^2} = 16 \frac{e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2} .$$

La fonction g vérifie bien les conditions (1) et (2).

2. a. En $+\infty$ $g(x) = 2 \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$ se comporte comme ses termes les plus forts, soit $2 \frac{e^{4x}}{e^{4x}} \rightarrow 2$; l'asymptote est donc $y = 2$. Il n'y a pas d'asymptote verticale car $e^{4x} + 1 > 0$.

b. La dérivée a déjà été calculée au 1. ; elle est positive donc g est croissante.

3. La tangente à (C_g) à l'origine a pour équation $y = g'(0)(x - 0) + g(0) = 4x$. Elle coupe Δ en $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.



1. 17. Equa diff, intégrale, volume, Am. du Sud 2004

3 points

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que } y(0) = e.$$

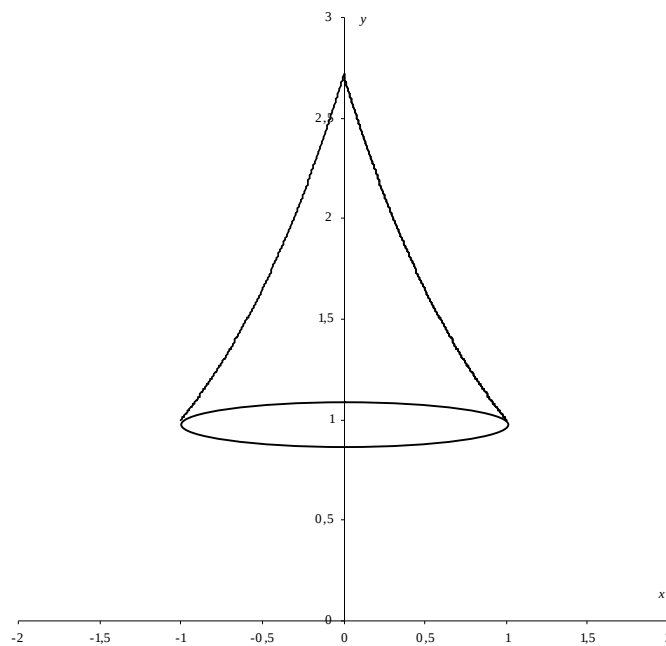
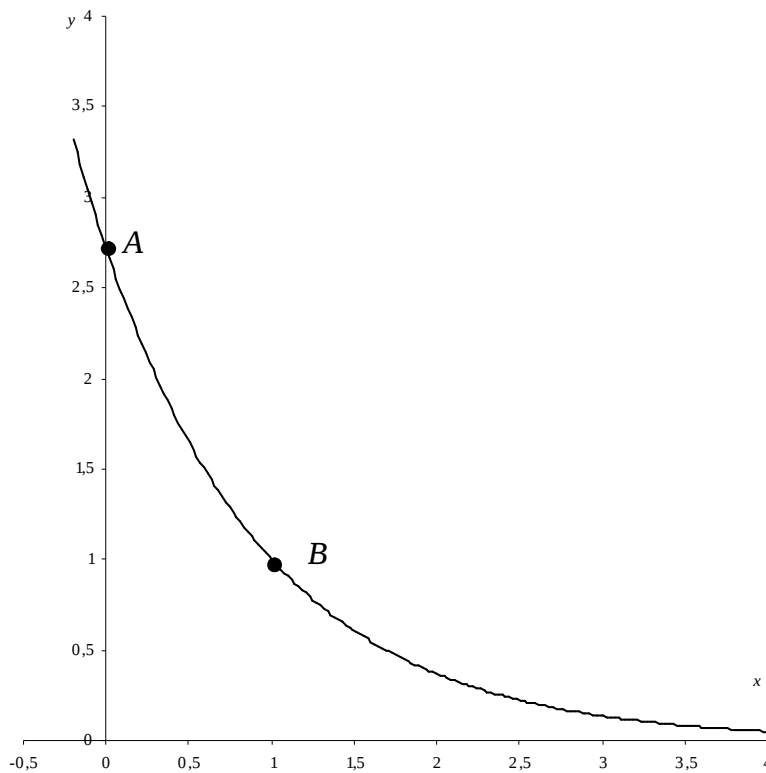
1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1; e]$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x .

3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\overline{AB}$ comme représenté sur la deuxième figure. On

note V son volume et on admet que $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$.

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



Fomesoutra.com
ça s'entraîne !
 Docs à portée de main

Correction

1. (E) $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ et $y(0) = e : f(x) = Ce^{-x}$ et $f(0) = Ce^0 = C = e$ donc $f(x) = ee^{-x} = e^{1-x}$.

2. $e^{1-x} = t \Leftrightarrow 1-x = \ln t \Leftrightarrow x = 1 - \ln t$ (on a ainsi la fonction réciproque de $f : f^{-1}(t) = 1 - \ln t$).

3. $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$: on pose $u = (1 - \ln t)^2$, $v' = 1$, d'où $u' = 2\left(-\frac{1}{t}\right)(1 - \ln t)$ et $v = t$:

$$V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt = \pi \left[t(1 - \ln t)^2 \right]_1^e + 2\pi \int_1^e 1 - \ln t dt = 0 - \pi + 2\pi \int_1^e 1 - \ln t dt ;$$

on pose $u = 1 - \ln t$, $v' = 1$, d'où $u' = -\frac{1}{t}$ et $v = t$: $\int_1^e 1 - \ln t dt = \left[t(1 - \ln t) \right]_1^e - \int_1^e -1 dt = -1 + (e-1) = e-2$ et enfin

$$V = -\pi + 2\pi e - 4\pi = \pi(2e - 5) \approx 1,37 .$$

Remarque : on voit sur la figure que le volume en question est quasiment celui d'un cône de base un cercle de rayon 1 et de hauteur 1,5. Comme le volume d'un cône est $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, on a bien environ 1,5.

