

1. 18. Equa diff + fonction+intégrale, Antilles 2001

11 points

Partie A :Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
 - a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
 - b. Montrer que v est solution de l'équation (2) si et seulement si $u+v$ est solution de (1).
 - c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).
 - d. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
 - a. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
 - b. L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudier le sens de variation de f .
3. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie B. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).
4. Etablir le tableau de variation de f .
5. Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie D : Calcul d'aire

1. Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x) dx$. (On justifiera la réponse)
2. a. Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
b. En déduire $\int_m^0 f(x) dx$.
3. Calculer la limite de $\int_m^0 f(x) dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

 **Fomesoutra.com**
ça soutra !
Docs à portée de main

Correction

Partie A

1. L'équation (2) sans second membre a, d'après le cours, pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ke^{2x}$ avec k réel quelconque.
2. a. On a $u'(x) = (ax + b)e^x + ae^x = (ax + a + b)e^x$ donc u est solution de l'équation différentielle (1)
 $\Leftrightarrow (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x$. Comme $e^x \neq 0$ pour tout réel x , u est solution de l'équation différentielle (1)
 $\Leftrightarrow ax + a + b - 2ax - 2b = x$ c'est à dire si et seulement si, pour tout x réel, $-ax + a - b = x$ soit
$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ et } b = -1.$$

La fonction u cherchée est donc définie par $u(x) = (-x - 1)e^x$.

b. On sait que $u'(x) - 2u(x) = xe^x$, v est solution de (2)

$$\Leftrightarrow v' - 2v = 0 \Leftrightarrow v' - 2v + u' - 2u = xe^x \Leftrightarrow (v' + u') - 2(v + u) = xe^x \Leftrightarrow (v + u)' - 2(v + u) = xe^x \Leftrightarrow u + v \text{ est solution de (1).}$$

Remarque : on peut aussi supposer que v est solution de (2) et en déduire que $u+v$ est solution de (1) puis supposer que $(u+v)$ est solution de (1) et en déduire que v est solution de (2).

c. Soit f une solution de (1). On peut poser $f = u + v$. (On a alors $v = f - u$). On sait que $u + v$ est solution de (1) $\Leftrightarrow v$ est solution de (2).

Les solutions de (1) sont donc les fonctions f définies par : $x \mapsto -(x+1)e^x + ke^{2x}$ ($k \in \mathbb{R}$)

d. On cherche k tel que $f(0)=0$: $f(0)=0 \Leftrightarrow -e^0 + ke^0 = 0 \Leftrightarrow k=1$. La solution de (1) qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto -(1+x)e^x + e^{2x}$

Partie B

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 2 = +\infty$. Ecrivons $g(x)$ en mettant en facteur le terme qui croît le plus vite : $g(x) = e^x(2 - xe^{-x} - 2e^{-x})$. Or on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $g'(x) = 2e^x - 1 = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$.

Signe de $g'(x)$: On a : $e^x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\ln 2$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
g	$+\infty$ $+\infty$		

Remarque : $\ln 2 - 1 \approx -0,31$, $g\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 2e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -1 + \ln 2$.

3. a. $g(0) = 2e^0 - 0 + 2 = 0$ donc 0 est une solution de l'équation $g(x) = 0$.

b. D'après le tableau de variation de g , l'autre solution α est dans l'intervalle $] -\infty ; -\ln 2[$; or sur cet intervalle, g est décroissante. La calculatrice donne : $g(-1,6) \approx 0,004$ et $g(-1,5) \approx -0,054$, par conséquent $g(-1,5) \leq g(\alpha) \leq g(-1,6)$ et donc $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4. Etude du signe de $g(x)$: résumons la dans un tableau.

x	$-\infty$	α	$-\ln 2$	0	$+\infty$
g	$+\infty$ $+\infty$				
signe de $g(x)$	+	0	-	0	+

Fomesoutra.com
sa soutra !
Docs à portée de main

Partie C :

1. $f(x) = e^{2x} - xe^x - e^x$. On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, par conséquent $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

$f(x) = e^{2x}(1 - xe^{-x} - e^{-x})$: on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut :

$$f'(x) = 2e^{2x} - [(x+1)e^x + 1 \times e^x] = 2e^{2x} - (x+2)e^x.$$

Mettons e^x en facteur pour faire apparaître $g(x)$: $f'(x) = e^x(2e^x - x - 2) = e^x g(x)$; comme, pour tout x réel, $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
f	$+\infty$	$f(\alpha)$		

	0	0
--	---	---

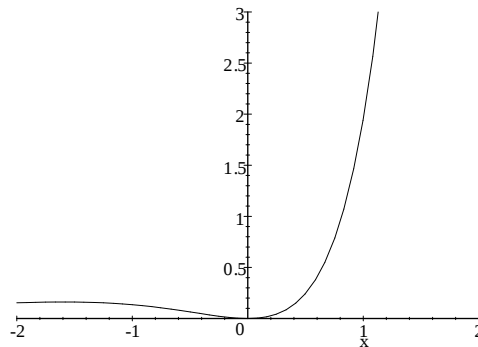
3. On sait que $g(\alpha) = 0$ donc $2e^\alpha - \alpha - 2 = 0$ soit $e^\alpha = \frac{\alpha + 2}{2}$.

On obtient $f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha + 1)e^\alpha = \left(\frac{\alpha + 2}{2}\right)^2 - (\alpha + 1)\left(\frac{\alpha + 2}{2}\right) = \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{4} - \left(\frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{2}\right)$,

soit $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4} = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$.

4. Nous l'avons déjà donné à la question 2.

5. La courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ et comme tangente en O.



Partie D :

1. Comme $m \leq 0$ et que f est positive sur $[m ; 0]$, l'intégrale en question est l'aire de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $(x = m)$ et $(x = 0)$.

2. a. Faisons, comme suggéré par l'énoncé, une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & v(x) = e^x \end{cases}$$

On en déduit $\int_m^0 x e^x dx = [x e^x]_m^0 - \int_m^0 e^x dx = -m e^m - [e^x]_m^0 = -m e^m - (1 - e^m) = (1 - m)e^m - 1$.

b. On a $\int_m^0 f(x) dx = \int_m^0 (e^{2x} - x e^x - e^x) dx = \int_m^0 (e^{2x} - e^x) dx - \int_m^0 x e^x dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - e^x\right]_m^0 - (1 - m)e^m + 1$, soit finalement :

$$\int_m^0 f(x) dx = \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} e^{2m} + e^m - (1 - m)e^m + 1 = \frac{1}{2} + m e^m - \frac{1}{2} e^{2m}.$$

3. On sait que $\lim_{m \rightarrow -\infty} m e^m = 0$ et que $\lim_{m \rightarrow -\infty} e^{2m} = 0$ donc $\lim_{m \rightarrow -\infty} \int_m^0 f(x) dx = \frac{1}{2}$.

1. 19. La chaînette

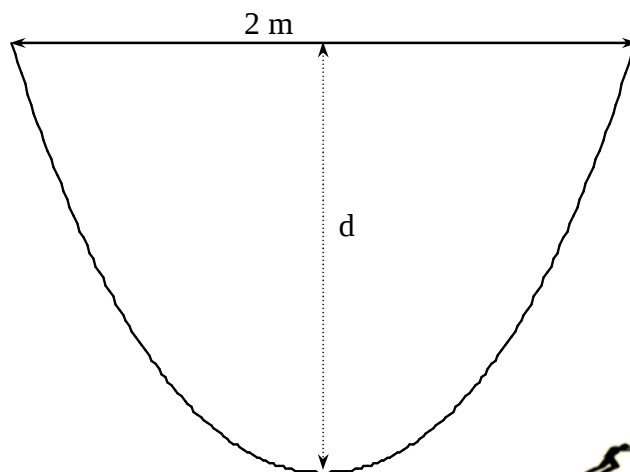
La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible suspendu à ses extrémités à deux points fixes.

On montre et on admettra dans ce problème que, rapportée à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ convenable la chaînette a pour équation

$$y = f_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$$

où λ est un paramètre réel positif dépendant de la longueur du fil. On note C_λ la courbe représentative de f_λ .

On laisse pendre un tel fil d'une longueur de 4 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m. Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flèche prise par le fil, c'est-à-dire la distance d indiquée sur le schéma.



Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

A. Etude de la chaînette

1. On prend $\lambda = 1$: étudiez les variations de $f_1(x)$; déterminez ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Tracez les courbes C_1 , C_2 et C_3 (unité graphique 1 cm).
3. Prouvez que pour tout λ la courbe C_λ se déduit de la courbe C_1 par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Dans toute la suite on prend λ strictement positif.

B. Recherche de d

Pour une courbe d'équation $y = f(x)$ un petit élément de courbe a pour longueur ds tel que $ds^2 = dx^2 + dy^2$, soit

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \Rightarrow s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

1. Faites un schéma montrant que vous avez compris quelque chose aux explications précédentes et montrez que la longueur de la chaînette est $L(\lambda) = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{\lambda}$.
2. Exprimer en fonction de λ la flèche $d(\lambda)$ de la chaînette C_λ .

C. Le problème consiste donc à trouver la valeur de λ pour laquelle $L(\lambda) = 4$

1. Donnez une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation (E) : $L(\lambda) = 4$.
2. On considère la fonction $\varphi(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}$. Calculez $\varphi'(t)$ et montrez que $\varphi'(t)$ est toujours positive. Déterminez la limite de $\varphi(t)$ en $+\infty$ et déduisez-en l'existence d'une unique solution de (E).
3. Déterminez alors les coordonnées du minimum de la fonction $f_\alpha(x)$ ainsi que $d(\alpha)$.

D. Une variante (nettement plus élaborée) de la question précédente est la suivante :

1. Résoudre l'équation d'inconnue X , $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$.
2. En déduire que $L(\lambda) = 4$ équivaut à $\lambda = \ln(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1})$.
3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.
 - a. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
 - b. Tracer sa courbe représentative ainsi que la droite $D(y = x)$.
 - c. Montrer que l'équation $g(x) = x$ a une seule solution comprise entre 2 et 3.
4. On note $I = [2, +\infty[$.
 - a. Démontrer que pour tout x de I , $g(x)$ appartient à I .
 - b. Prouver que pour tout t de I , $0 < g'(t) \leq 0,5$. En déduire que pour tout x de I , $|g(x) - \alpha| \leq 0,5|x - \alpha|$.

5. On considère la suite u_n définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = g(u_n)$.
- En utilisant la construction du 3.b. conjecturer le comportement de u_n .
 - Démontrer que pour tout n , $|u_n - \alpha| \leq 0,5^n |2 - \alpha|$. Conclure quant à la convergence de u_n .
 - Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près.
 - Améliorez le résultat obtenu au C.3.

Correction

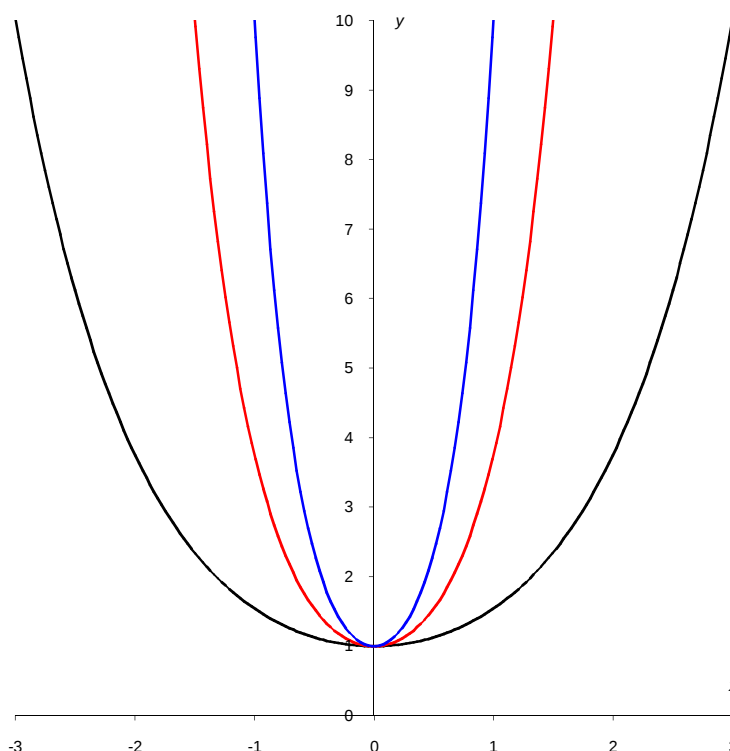
A. Etude de la chaînette

1. $\lambda = 1$, $y = f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$; $f_1'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$;

$e^x - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow x \geq -x \Leftrightarrow x \geq 0$; donc $\cosh$ est décroissante avant 0, croissante après.

En fait $\cosh$ est paire donc sa courbe est symétrique par rapport à 0 ; en $+\infty$ la fonction est comme e^x et tend vers $+\infty$. Le minimum est 1 en 0.

2. Merci à l'ordinateur...



3. Essayons une homothétie de centre O , de rapport k (inconnu) sur C_1 ; pour ce faire on écrit analytiquement cette homothétie, soit $M'(x', y')$ en fonction de $M(x, y)$ puis on obtient les coordonnées de M en fonction de celles de M' ; enfin on remplace dans f_1 .

$$M(x; y) \rightarrow M'(x'; y') \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1/k)x' \\ y = (1/k)y' \end{cases} ;$$

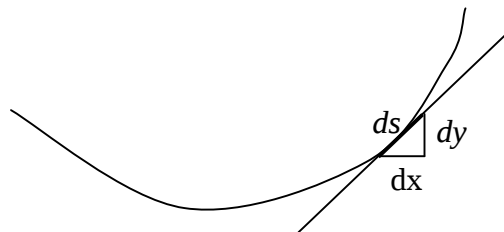
remplaçons : $y = f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow \frac{y'}{k} = \frac{e^{\frac{x'}{k}} + e^{-\frac{x'}{k}}}{2} \Leftrightarrow y' = \frac{e^{\frac{x'}{k}} + e^{-\frac{x'}{k}}}{2 \frac{1}{k}} = f_1(x')$.

Fomesoutra.com
ga soutra !
Docs à portée de main

Moralité, la courbe $C_{1/k}$, $y = f_{1/k}(x)$, est l'image de C_1 par l'homothétie de centre O de rapport k donc C_λ est l'image de C_1 par l'homothétie de centre O de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

B. Recherche de d

1. L'essentiel est dans $ds^2 = dx^2 + dy^2$: on considère un petit morceau de courbe comme un bout de tangente et cette expression est le théorème de Pythagore à cet endroit.



On a donc $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ avec $a = -1$, $b = 1$ et $f = f_\lambda$:

$y = f_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda} \Rightarrow f'_\lambda(x) = \frac{\lambda(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})}{2\lambda} = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}$ qui s'annule en $x = 0$; le repère choisi est donc centré sur le sommet de la courbe ; par ailleurs $f_\lambda(0) = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}$, enfin comme la largeur est de deux mètres les extrémités sont aux abscisses -1 et 1 et à l'ordonnée $f_\lambda(1) = f_\lambda(-1) = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2\lambda}$, on a $d(\lambda) = f_\lambda(1) - f_\lambda(0) = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda} - 2}{2\lambda}$. On a donc :

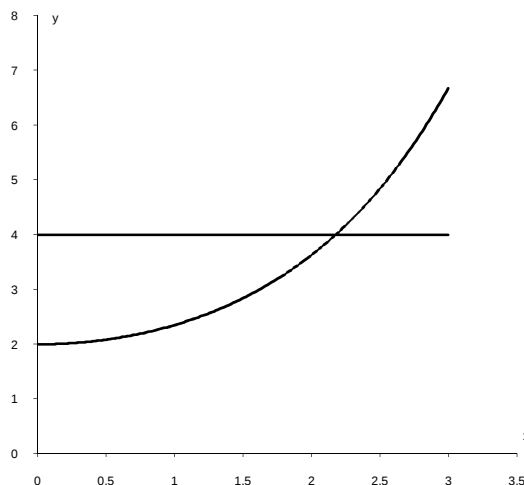
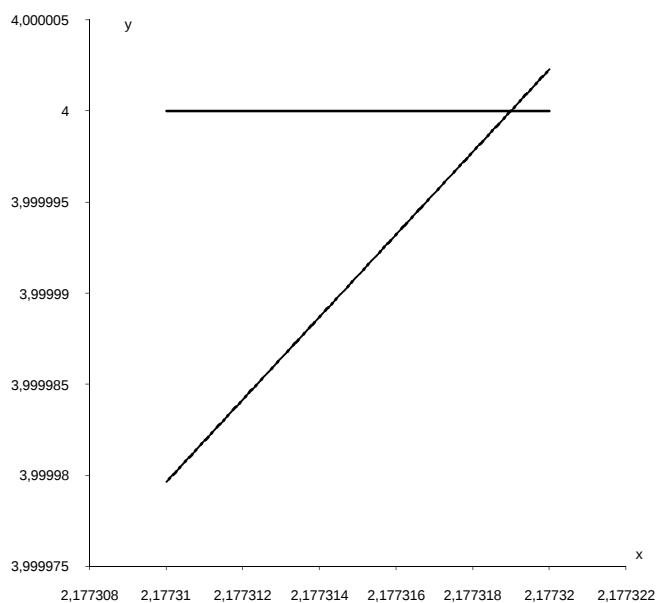
$$L(\lambda) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'_\lambda(x)]^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{4 + e^{2\lambda x} - 2 + e^{-2\lambda x}}{4}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}\right)^2} dx \text{ d'où}$$

$$L(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda} (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}) \right]_{-1}^{+1} = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + e^{-\lambda}}{2\lambda} = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

2. Comme vu au 1. on a $d(\lambda) = f_\lambda(1) - f_\lambda(0) = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} - \frac{1}{\lambda}$.

C. 1. $L(\lambda) = 4$ à 10^{-4} près vaut 2,1773.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main



2. $t > 0$, $\varphi(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}$, $\varphi'(t) = \frac{(e^t + e^{-t})t - (e^t - e^{-t})}{t^2}$. La situation se corse...

Nous allons considérer la fonction $\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ dont la dérivée est $\tanh' t = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}$; on a alors

$$(e^t + e^{-t})t - (e^t - e^{-t}) = (e^t + e^{-t})[t - \tanh t] ;$$

posons $u(t) = t - \tanh t$, alors

$$u'(t) = 1 - \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{(e^t + e^{-t})^2 - 4}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{(e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2} \geq 0$$

donc u est croissante et $u(t) \geq u(0) = 0$. Ouf !!!

Nota bene : lorsqu'on trace la courbe de $\varphi(t)$ on s'aperçoit qu'elle démarre à 2 qui doit donc être la limite de φ en 0. On peut l'obtenir comme suit : $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 2e^{-t} \frac{e^{2t} - 1}{2t} = 2$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

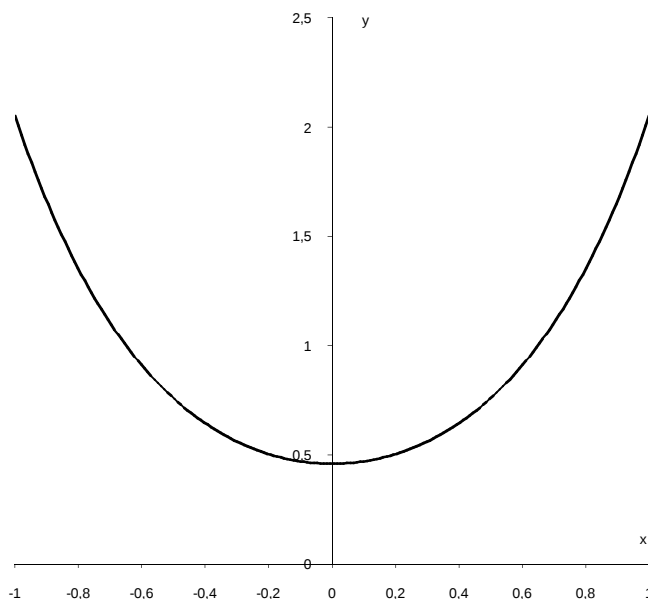
En $+\infty$ c'est plus simple puisque φ se comporte comme $\frac{e^t}{t}$ qui tend vers $+\infty$.

φ est donc continue, monotone strictement croissante de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$, elle est bijective et l'équation $\varphi(t) = 4$ a une seule solution.

3. Le minimum de $f_\alpha(x)$ est en $x = 0$, $f_\alpha(0) = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{2,1773} \approx 0,46$ ce qui donne

$$d(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha} = 2,052 - 0,46 \approx 1,59.$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main



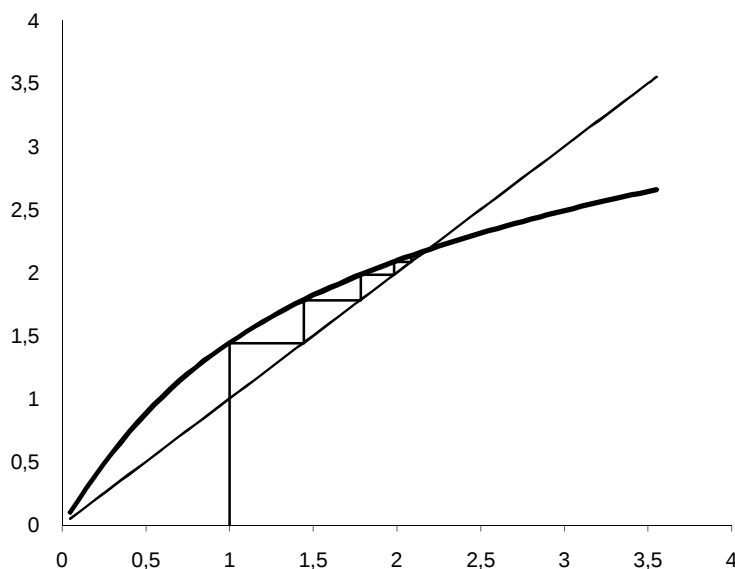
D. 1. $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$: $\Delta = 16\lambda^2 + 4$, $X_2 = 2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 + 1}$, $X_1 = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}$.

2. $L(\lambda) = 4$ donne alors $\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{\lambda} = 4 \Leftrightarrow e^\lambda + e^{-\lambda} = 4\lambda \Leftrightarrow e^{2\lambda} - 4\lambda e^\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^\lambda \\ X^2 - 4\lambda X + 1 = 0 \end{cases}$.

Comme λ est positif, on choisit la racine positive, soit $e^\lambda = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow \lambda = \ln(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1})$.

3. $g(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.

a. $g'(x) = \frac{(2x + \sqrt{4x^2 + 1})'}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2 \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 1}}}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} > 0$ donc croissante sur $\mathbb{R}$.



x	0	$\sqrt{3}/2$	$+\infty$
v'	+	0	-
v	0	1,31	

b.

On trace la courbe représentative de g ainsi que la droite $D(y = x)$; sur la figure on a rajouté l'escalier formé par les termes de la suite (question posée en C. 5. a, on part de 1 sur la figure pour mieux voir, ... fichier à télécharger : http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/TS_ds7_C.xls)

c. Pour $x > 0$, soit $v(x) = g(x) - x$: $v'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} - 1$;
 $v'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 = \sqrt{4x^2 + 1} \Leftrightarrow 4 = 4x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
 Docs à portée de main

On a le tableau de variations ci-contre. On calcule $v(2) \approx 0,1 > 0$ et $v(3) \approx -0,05 < 0$ donc v s'annule une seule fois.

4. a. g est croissante, $g(2) \approx 2,094 > 2$ donc pour tout x , $g(x)$ appartient à I .

b. Pour $0 < g'(t)$ c'est évident ; pour $g'(t) \leq 0,5$: $t \geq 2 \Rightarrow 4t^2 \geq 16 \Rightarrow \sqrt{4t^2 + 1} > \sqrt{17} > 4 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{4t^2 + 1}} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Intégrons cette relation entre x et α :

$$0 < g'(t) \leq 0,5 \Rightarrow 0 < \int_x^\alpha g'(t) dt \leq \int_x^\alpha 0,5 dt \Rightarrow 0 < g(\alpha) - g(x) \leq 0,5(\alpha - x) ; \text{ on peut recommencer avec } x \text{ supérieur à } \alpha,$$

ce qui donne la relation dans l'autre sens d'où en remarquant que $g(\alpha) = \alpha$, $|g(x) - \alpha| \leq 0,5|x - \alpha|$.

5. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. La suite est croissante, majorée, convergente vers α .

b. On utilise $|g(x) - \alpha| \leq 0,5|x - \alpha|$ avec $x = u_n$, $g(x) = u_{n+1}$ d'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,5|u_n - \alpha|$. Par récurrence il est immédiat que

$$|u_n - \alpha| \leq 0,5|u_{n-1} - \alpha| \leq 0,5^2|u_{n-2} - \alpha| \leq \dots \leq 0,5^n|u_0 - \alpha| = 0,5^n|2 - \alpha|.$$

Cette dernière suite est géométrique de raison 0,5 ; elle converge donc vers 0 et u_n converge vers α .

c. A la calculatrice on voit que $u_{12} = 2,1773\dots$ et est donc stabilisé à 10^{-4} près de α (voir le fichier). A la main on peut résoudre $0,5^n|2 - \alpha| \leq 10^{-4}$, ce qui donne une idée.

On a alors $2 \leq \alpha \leq 3 \Rightarrow |2 - \alpha| \leq 1 \Rightarrow 0,5^n|2 - \alpha| \leq 0,5^n \leq 10^{-4} \Rightarrow n \geq \frac{\ln 10^{-4}}{\ln 0,5} \approx 13, \dots$ soit $n_0 = 14$.

d. On peut donc obtenir une valeur très précise de α : 2,17731898496531 pour u_{41} est très bon.

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x - 1$.

1. 20. Primitive de ln

Soit la fonction définie sur l'intervalle $I =]4 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3 \ln \frac{x+1}{x-4}$$

et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 1 cm.

1. Étude de f

a. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de I .

- b. Montrer que sur I, $f'(x)$ est strictement négative et dresser le tableau de variation de f .
- c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$ est une asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).
2. Calcul d'aire
- a. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$.
- b. Montrer que la fonction $G : x \rightarrow (x+1) \ln(x+1) - x$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \ln(x+1)$ sur I.
- c. Montrer que la fonction $H : x \rightarrow (x-4) \ln(x-4) - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln(x-4)$ sur I.
- d. Dédurre des questions précédentes le calcul de l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 5$ et $x = 6$.
- On donnera la valeur exacte de A puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction

1. a. Lorsque x tend vers 4, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers $+\infty$ ainsi que $\ln \frac{x+1}{x-4}$ donc f tend vers $+\infty$.
- Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers 1, $\ln \frac{x+1}{x-4}$ tend vers 0, $-2x+5$ tend vers $-\infty$ donc f tend vers $-\infty$.
- b. $f'(x) = -2 + 3 \left[\ln \frac{x+1}{x-4} \right]' = -2 + 3 [\ln(x+1) - \ln(x-4)]' = -2 + 3 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-4} \right] = \frac{-2(x+1)(x-4) - 15}{(x+1)(x-4)}$.
- Lorsque $x > 4$, $x+1$ est positif, $x-4$ est positif donc le numérateur est négatif et le dénominateur est positif. Moralité, f' est négative.
- c. $f(x) - (-2x+5) = \ln \frac{x+1}{x-4}$; nous avons dit que ce terme tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ donc la droite (D) est une asymptote à (C). Lorsque $x > 4$, $\frac{x+1}{x-4} > 0$ donc (C) est au-dessus de (D).
2. a. On pose $u = \ln x$, $v' = 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$, $v = x$ d'où une primitive de $\ln x$ est $x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x$.
- b. On dérive $G : G'(x) = 1 \cdot \ln(x+1) + (x+1) \frac{1}{x+1} - 1 = \ln(x+1)$.
- c. Exactement pareil.
- d. On cherche $A = \int_5^6 f(x) - (-2x+5) dx = 3 \int_5^6 \ln(x+1) - \ln(x-4) dx = 3[G(6) - G(5)] - 3[H(6) - H(5)]$;
- $G(6) - G(5) = 7 \ln 7 - 6 - 6 \ln 6 + 5 = 7 \ln 7 - 6 \ln 6 - 1$, $H(6) - H(5) = 2 \ln 2 - 6 - 1 \ln 1 + 5 = 2 \ln 2 - 1$
- et le résultat $A = 3[7 \ln 7 - 6 \ln 6 - 2 \ln 2] \approx 4,45$ U.

1. 21. Equation différentielle

On se propose de déterminer les fonctions dérivables solutions de l'équation différentielle

$$2y' + y = x^2 + 2x - 2 \quad (E)$$

1. Montrer qu'il existe une fonction polynôme g du second degré solution de (E) et déterminer laquelle.
2. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle :
- $$2y' + y = 0 \quad (E')$$
3. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).
4. Déterminer les solutions dont la représentation graphique passe par l'origine du repère.

Correction

1. On pose $g(x) = ax^2 + bx + c$ d'où $2g' + g = 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = ax^2 + (4a+b)x + 2b+c$, soit par identification :

$$\begin{cases} a=1 \\ 4a+b=2 \\ 2b+c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 2.$$

 **Fomesoutra.com**
ça s'écrit
 Docs à portée de main

Vérification, $2y' + y = 4x - 4 + x^2 - 2x + 2 = x^2 + 2x - 2$, ok.

2. f est solution de (E) : $2f' + f = x^2 + 2x - 2 = 2g' + g \Leftrightarrow 2(f' - g') + (f - g) = 0 \Leftrightarrow 2(f - g)' + (f - g) = 0$, on a donc bien $f - g$ est solution de l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ (E').

3. $y' = -\frac{1}{2}y \Rightarrow y = Ce^{-\frac{1}{2}x}$ d'où $f(x) - g(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} + x^2 - 2x + 2$.

4. On doit avoir $f(0)=0 \Leftrightarrow C+2=0 \Leftrightarrow C=-2$ et la solution $f(x)=-2e^{-\frac{1}{2}x}+x^2-2x+2$.

