1. 1. Equation différentielle et primitive

Soit l'équation différentielle (E) : $y'+y=x-1$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x e^t(t-1)dt$.

2. Soit *z* une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $f(x)=z(x)e^{-x}$. Montrer que *f* est solution de (E) si, et seulement si, pour tout *x* réel, $z'(x)=e^x(x-1)$.

3. A l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions *z* vérifiant $z'(x)=e^x(x-1)$.

4. Déduire de la question précédente les solutions de (E). Déterminer la solution pour laquelle l'image de 1 est 0.

Correction

1. On pose $u=t-1, v'=e^t \Rightarrow u'=1, v=e^t$ d'où

$$\int_1^x e^t(t-1)dt=\left[(t-1)e^t\right]_1^x-\int_1^x e^t dt=(x-1)e^x-0-e^x+e=(x-2)e^x+e.$$

2. $f(x)=z(x)e^{-x}$.

f est solution de (E) :

$$f'+f=x-1 \Leftrightarrow z'(x)e^{-x}-z(x)e^{-x}+z(x)e^{-x}=x-1 \Leftrightarrow z'(x)e^{-x}=x-1 \Leftrightarrow z'(x)=(x-1)e^x.$$

3. Il est clair que *z* est une des primitives de $(x-1)e^x$, soit une fonction du type du 1. agrémentée d'une constante : $z(x)=(x-2)e^x+e+K$.

4. $f(x)=z(x)e^{-x} \Rightarrow f(x)=x-2+ee^{-x}+Ke^{-x}$; $f(1)=-1+ee^{-1}+Ke^{-1}=Ke^{-1}=0 \Rightarrow K=0$.

La solution cherchée est donc $f(x)=x-2+e^{-x+1}$.

1. 2. Equation différentielle : transfusion

Une *exsanguino-transfusion* peut se schématiser de la façon suivante : un récipient R contient un liquide L dans lequel se trouve une substance S dont on veut diminuer la concentration. Le volume de R est de *p* litres (genre le corps humain…) et la concentration initiale de S est de *a* gramme par litre dans L.

1. *Première méthode* : on injecte dans R de manière continue du liquide L ne contenant pas la substance S et on prélève simultanément la même quantité de mélange par un tuyau de sortie de sorte que le volume de liquide dans R reste constant. Les tuyaux d'arrivée et de sortie ont des débits de *d* litres par heure.

On note *m*(*t*) la quantité de S dans L au bout du temps *t* et *C*(*t*) sa concentration.

a. Montrer que $m(t+h)-m(t)=-dhC(t)$; en déduire que $m'(t)=-dC(t)$ puis que $C'(t)=-\frac{d}{p}C(t)$ (**E**).

b. Démontrer que l'unique solution de (E) est $C(t)=a\exp\left(-\frac{d}{p}t\right)$.

c. Au bout de combien de temps la concentration de S est-elle inférieure à 5 % de sa valeur initiale ?

d. Cette méthode permet-elle d'éliminer complètement S ?

2. *Deuxième méthode* : toutes les minutes on prélève dans R un pourcentage fixe *q* de mélange que l'on remplace par la même quantité de L ne contenant pas S. A la minute n on appelle m_n la masse de S restant dans R et C_n sa concentration.

a. Exprimer en fonction de *n* et des autres paramètres la masse Δm_n de S prélevée à la minute *n*.

b. Exprimer m_{n+1} en fonction de m_n puis C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire C_n en fonction de *n*, *a*, *p* et *q*.

c. Au bout de combien de minutes la concentration de S est-elle inférieure à 5 % de sa valeur initiale ?

d. En posant $n=60t$ donner une expression de C_n. Comparer au résultat du 1.

Correction

1. *Première méthode* : on note *m*(*t*) la quantité de S dans L au bout du temps *t* et *C*(*t*) sa concentration.

a. Pendant la durée *h* la quantité *m* de S passe de *m*(*t*) à *m*(*t*+*h*) ; la différence entre les deux est ce qui est sorti pendant ce laps de temps, soit

volume sorti x *concentration* = *débit* x *temps* x *concentration*,

on a donc bien $m(t+h)-m(t)=-dhC(t)$;

divisons tout par *h* : $\frac{m(t+h)-m(t)}{h}=-dC(t)$;

passons à la limite quand *h* tend vers 0 : $m'(t)=-dC(t)$.

Par ailleurs à un instant *t* donné on a $m(t)=pC(t)\Rightarrow m'(t)=pC'(t)$ d'où $C'(t)=-\frac{d}{p}C(t)$ (**E**).

b. On reprend donc le cours et on a $C(t)=K\exp\left(-\frac{d}{p}t\right)$; comme $C(0)=a$ on en déduit que *K* = *a* et $C(t)=a\exp\left(-\frac{d}{p}t\right)$.

c. On cherche *t* de sorte que

$$C(t) \le 0,05a \Leftrightarrow a\exp\left(-\frac{d}{p}t\right) \le 0,05a \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{d}{p}t\right) \le 0,05 \Leftrightarrow -\frac{d}{p}t \le \ln(0,05) \Leftrightarrow t \ge -\frac{p\ln(0,05)}{d}.$$

d. Pour éliminer complètement S il faudrait que $C(t)$ s'annule à un moment, ce qui est impossible… ceci dit c'est comme pour l'homéopathie, au bout d'un certain temps la quantité restante de S devient tellement faible que l'on peut considérer qu'il n'y en a plus.

2. *Deuxième méthode* : toutes les minutes on prélève dans R un pourcentage fixe q de mélange que l'on remplace par la même quantité de L ne contenant pas S.

a & b. A $t = 0$ on a $m_0 = ap$, à $t = 1$ mn on a $m_1 = m_0 - qm_0 = ap(1-q)$, puis de minute en minute on multiplie par $1-q$, ce qui donne $m_n = ap(1-q)^n$.

La concentration quand à elle est $C_n = \frac{1}{p}m_n(t) = a(1-q)^n$

c. On a $C_n < 0,05C_0 \Leftrightarrow (1-q)^n < 0,05 \Leftrightarrow n\ln(1-q) \le \ln(0,05) \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln 0,05}{\ln(1-q)}$.

d. $n = 60t$, soit $C_n = a(1-q)^{60t} = a\exp\left(60t\ln(1-q)\right) = a\exp\left(kt\right)$ avec $k = 60\ln(1-q) = \ln\left[(1-q)^{60}\right]$.

Pour que ce soit semblable il faut donc que $\ln\left[(1-q)^{60}\right] = -\frac{d}{p}$, soit

$$1 - q = \exp\left(-\frac{d}{60p}\right) \Leftrightarrow q = 1 - \exp\left(-\frac{d}{60p}\right).$$

Application numérique : $p = 5$ l, $d = 0,1$ l/mn, on a alors $q = 0,03$ %, pour le premier cas t supérieur à 150 mn, pour le deuxième cas n supérieur à 8987 (secondes), soit t supérieur à 150 mn.

1. 3. Equation différentielle : populations

Une étude sur le comportement de bactéries placées dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à proposer une loi d'évolution de la forme

$$N'(t) = 2N(t) - 0,0045\left[N(t)\right]^2 \qquad \textbf{(1)}$$

où t est le temps exprimé en heures. $N(t)$ représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant t ; à $t = 0$ on a $N(0) = 1$ (en milliers).

1. On pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$; montrer que y est solution d'une équation différentielle (E) du type $y' = ay+b$.

2. Résoudre (E).

3. En déduire que la solution de (**1**) est $N(t) = \frac{1}{0,99775e^{-2t} + 0,00225}$.

4. Etudier les variations de N.

5. Montrer que $N(t)=\dfrac{e^{2t}}{0,99775+0,00225e^{2t}}$. Déduisez-en une primitive de $N(t)$.

6. On appelle *nombre moyen* de bactéries la limite quand *T* tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T N(t)dt$. Calculer cette intégrale et en déduire le nombre moyen de bactéries dans l'enceinte.

Correction

1. $y(t)=\dfrac{1}{N(t)} \Leftrightarrow N(t)=\dfrac{1}{y(t)} \Rightarrow N'(t)=-\dfrac{y'(t)}{y^2(t)}$. Remplaçons dans (**1**) :

$$N'(t)=2N(t)-0,0045N(t)^2 \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2}=\frac{2}{y}-\frac{0,0045}{y^2} \Leftrightarrow y'=-2y+0,0045.$$

2. On a donc la solution $y(t)=Ce^{-2t}-\dfrac{0,0045}{-2}=Ce^{-2t}+0,00225$. A t = 0 on a $N(0)$ = 1 d'où $y(0)$ = 1 et donc $1=C+0,00225 \Rightarrow C=0,99775$.

3. La solution pour *N* est donc $N(t)=\dfrac{1}{y(t)}=\dfrac{1}{0,00225+0,99775e^{-2t}}=\dfrac{e^{2t}}{0,00225e^{2t}+0,99775}$.

4. On a $N'(t)=\dfrac{-\left(0,99775\times -2\times e^{-2t}\right)}{\left(0,00225+0,99775e^{-2t}\right)^2}=\dfrac{1,9955e^{-2t}}{\left(0,00225+0,99775e^{-2t}\right)^2}>0$ donc *N* est croissante. En $+\infty$ sa limite est $\dfrac{1}{0,00225}\approx 444$.

5. $N(t)=\dfrac{e^{2t}}{0,00225e^{2t}+0,99775}$; $N(t)$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u=0,00225e^{2t}-0,00125$, soit $u'=0,0045e^{2t}$.

On écrit donc $N(t)=\dfrac{1}{0,0045}\dfrac{0,0045e^{2t}}{0,00225e^{2t}+0,99775}$; une primitive de *N* est alors

$$\frac{1}{0,0045}\ln\left(0,00225e^{2t}+0,99775\right).$$

6.
$$\frac{1}{T}\int_0^T N(t)\,dt=\frac{1}{T}\left[\frac{1}{0,0045}\ln\left(0,00225e^{2t}+0,99775\right)\right]_0^T$$
$$=\frac{\ln\left(0,00225e^{2T}+0,99775\right)-\ln(1)}{0,0045T}=\frac{\ln\left(0,00225e^{2T}+0,99775\right)}{0,0045T}$$

Quand T tend vers $+\infty$, $\left(0,00225e^{2T}+0,99775\right)$ est équivalent à $0,00225e^{2T}$ et

$\dfrac{\ln\left(0,00225e^{2T}+0,99775\right)}{0,0045T}$ est équivalent à $\dfrac{2T+\ln\left(0,00225\right)}{0,0045T}=\dfrac{2}{0,0045}+\dfrac{\ln\left(0,00225\right)}{0,0045T}$ qui tend donc vers $\dfrac{2}{0,0045}\approx 444$.

1. 4. Equation différentielle : poursuite

Cet exercice est une (libre) adaptation de Max et Lucie : voir

http://promenadesmaths.free.fr/fichiers_pdf/trajectoire_poursuite.pdf

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle $xy''=-R\sqrt{1+y'^2}$ (**E**).

1. a. On considère la fonction $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Etudier les variations de sinh(x).

b. Montrer que pour tout u réel, il existe un unique x tel que sinh(x) = u.

c. Montrer que $x=\sinh^{-1}(u)=\ln(u+\sqrt{u^2+1})$.

d. Montrer que la dérivée de sinh^{-1}(u) est $\left(\sinh^{-1}(u)\right)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$.

2. a. Montrer que l'équation (**E**) est équivalente à $\dfrac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}=-\dfrac{R}{x}$ et donne après intégration

$$\sinh^{-1}(y')=-R\ln x+K$$

où K est une constante.

b. En déduire que $y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^K}{x^R}-\dfrac{x^R}{e^K}\right)$.

c. Avec la condition initiale $y'(1)=0$, montrer que $y'=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^R-(x)^R\right]$.

c. Démonstration de cours :

Montrer qu'une primitive de x^m où ***m* est réel** et différent de −1 est $\dfrac{1}{m+1}x^{m+1}$.

En déduire que si R est différent de 1 on a $y=\dfrac{1}{2(1-R)}x^{1-R}-\dfrac{1}{2(1+R)}x^{R-1}+K'$ où K' est une constante.

Déterminer la valeur de K' pour que $y(1)$ = 0.

d. Tracez la solution obtenue (on prendra R = 2).

Correction

1. a. $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$; sa dérivée est $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ qui est toujours positive.

En $+\infty$, sinh tend vers $+\infty$, en $-\infty$ elle tend vers $-\infty$.

b. sinh est continue, monotone strictement croissante de $]-\infty\,;+\infty[$ vers $]-\infty\,;+\infty[$ donc pour tout *u* on aura un unique *x* correspondant. sinh est bijective.

c. Il faut résoudre l'équation

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=u\Leftrightarrow e^x-e^{-x}=2u\Leftrightarrow e^{2x}-2ue^x-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}e^x=X\\X^2-2uX-1=0\end{cases}.$$

On a une équation du seconde degré à résoudre : $\Delta=4u^2+4$ d'où $X_1=\dfrac{2u+2\sqrt{u^2+1}}{2}=u+\sqrt{u^2+1}$ et $X_2=u^2-\sqrt{u^2+1}$; mais comme $e^x=X>0$ la deuxième solution ne convient pas. On a donc

$$x=\sinh^{-1}(u)=\ln(X_1)=\ln(u+\sqrt{u^2+1}).$$

On pouvait également remplacer *x* par $\ln(u+\sqrt{u^2+1})$ dans $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ et vérifier que le résultat est bien *x*.

d. Attention à la dérivation des fonctions composées :

$$\left[\ln(u+\sqrt{u^2+1})\right]'=\frac{\left[u+\sqrt{u^2+1}\right]'}{u+\sqrt{u^2+1}}=\frac{u'+\dfrac{\cancel{2}u'u}{\cancel{2}\sqrt{u^2+1}}}{u+\sqrt{u^2+1}}=\frac{\dfrac{u'(u+\sqrt{u^2+1})}{\sqrt{u^2+1}}}{u+\sqrt{u^2+1}}=\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}.$$

Ce résultat peut s'obtenir également en passant par $(f\circ g)'=g'.(f'\circ g)$ et en prenant $g=f^{-1}$; on a alors $(f\circ g)'(x)=\left(f\circ f^{-1}\right)'(x)=(x)'=1$ et $f'\circ g=f'\circ f^{-1}$ d'où $\left(f^{-1}\right)'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$. Ici ça donne

$$\left(\sinh^{-1}(u)\right)'=u'.\frac{1}{\cosh\left(\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right)}=\frac{2u'}{e^{\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)}+e^{-\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)}}=\frac{2u'}{u+\sqrt{u^2+1}+\dfrac{1}{u+\sqrt{u^2+1}}},$$

soit le résultat demandé car

$$u+\sqrt{u^2+1}+\frac{1}{u+\sqrt{u^2+1}}=u+\sqrt{u^2+1}+\frac{u-\sqrt{u^2+1}}{u^2-u^2-1}=2\sqrt{u^2+1}.$$

2. a. On a (**E**) $xy''=-R\sqrt{1+y'^2}\Leftrightarrow\dfrac{xy''}{\sqrt{1+y'^2}}=-R\Leftrightarrow\dfrac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}=-\dfrac{R}{x}\Rightarrow\sinh^{-1}(y')=-R\ln x+K$.

b. On applique sinh des deux côtés :

$$\sinh\left[\sinh^{-1}(y')\right]=\sinh\left[-R\ln x+K\right]\Leftrightarrow y'=\frac{1}{2}\left(e^{-R\ln x+K}-e^{R\ln x-K}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{K}e^{\ln x^{-R}}-e^{-K}e^{\ln x^{R}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{K}x^{-R}-\frac{1}{e^{K}}x^{R}\right)$$

et finalement $y'=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{K}}{x^{R}}-\frac{x^{R}}{e^{K}}\right)$.

c. $y'(1)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{K}}{1}-\frac{1}{e^{K}}\right)=0\Leftrightarrow e^{K}=\frac{1}{e^{K}}\Leftrightarrow e^{2K}=1\Leftrightarrow 2K=0\Leftrightarrow K=0$. D'où $y'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^{R}}-x^{R}\right]$.

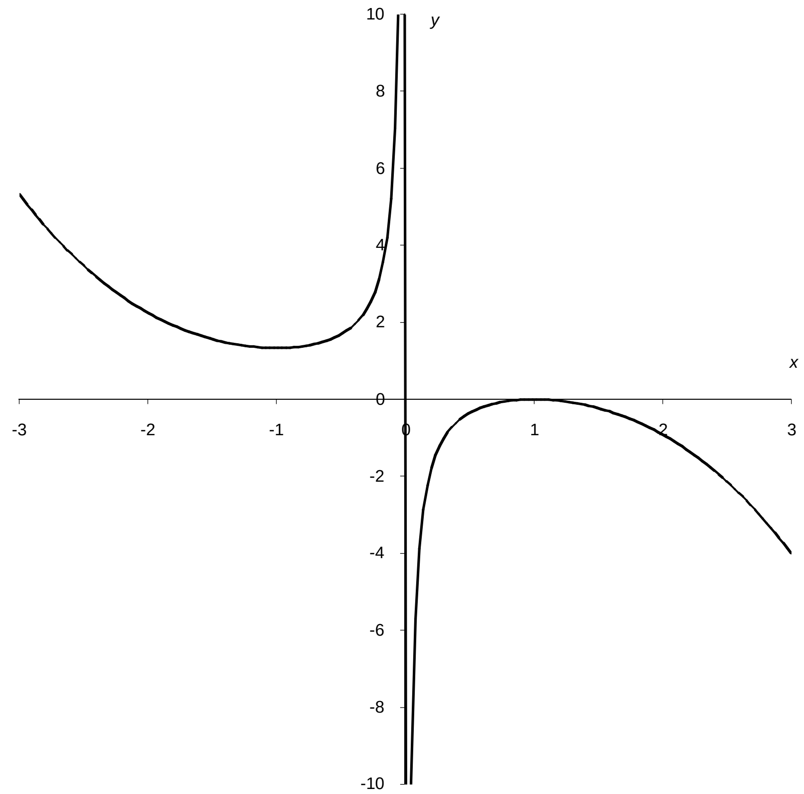
3. a. Démonstration de cours :utiliser $x^{m}=e^{m\ln x}$ ...

b. On intègre : $y'=\frac{1}{2}\left[x^{-R}-x^{R}\right]\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-R}x^{1-R}-\frac{1}{1+R}x^{R+1}\right]+K'$.

$$y(1)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-R}1^{1-R}-\frac{1}{1+R}1^{R+1}\right]+K'=0\Rightarrow K'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+R}-\frac{1}{1-R}\right]=\frac{-R}{1-R^{2}}.$$

c. La solution obtenue est $y(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-R}x^{1-R}-\frac{1}{1+R}x^{R+1}\right]+\frac{R}{R^{2}-1}$, soit avec $R=2$:

$$y(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^{3}\right]+\frac{2}{3}=-\frac{1}{2x}-\frac{1}{6}x^{3}+\frac{2}{3}.$$



On vérifie bien les conditions initiales...