

1. 1. Eq. différentielle : désintégrations successives

partie A

La désintégration radioactive du Zirconium ^{95}Zr se fait en deux étapes : formation de Niobium radioactif (^{95}Nb) puis transformation du Niobium qui conduit à un isotope stable. On s'intéresse à l'évolution du ^{95}Nb en fonction du temps.

À l'instant t (exprimé en jours), on note $Z(t)$ le nombre d'atomes de ^{95}Zr et $N(t)$ le nombre d'atomes de ^{95}Nb .

La fonction $Z(t)$ est solution de l'équation différentielle $Z'(t) = -0,02Z(t)$ avec $Z(0) = Z_0$.

1. Donner l'expression de $Z(t)$ en fonction de t et de Z_0 . Quel est le sens de variation de Z ?
2. Pendant que Z décroît, N croît et est solution de l'équation différentielle $N'(t) = Z(t) - 0,01N(t)$ avec $N(0) = 0$.

a. On pose $N(t) = f(t)e^{-0,01t}$. Montrer que $f'(t) = Z_0e^{-0,01t}$.

b. En déduire que $N(t) = 100Z_0(e^{-0,01t} - e^{-0,02t})$.



Partie B

On prend $Z_0 = 2$, de sorte que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'expression de $N(t)$ est :

$$N(t) = 200(e^{-0,01t} - e^{-0,02t}).$$

On note C la courbe représentative de la fonction N dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 10 jours sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $N(0)$.
2. a. Calculer la limite de $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
- b. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
3. a. Montrer que la fonction N' dérivée de N vérifie $N'(t) = 200e^{-0,02t}(0,02 - 0,01e^{0,01t})$.
- b. Résoudre l'équation $N'(t) = 0$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution t_0 de cette équation.
- c. Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $N'(t) \geq 0$. En déduire le tableau de variations de la fonction N . Préciser la valeur exacte de $N(t_0)$.
4. Construire la courbe C sur l'intervalle $[0 ; 150]$.
5. a. Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pour lequel $N(t) \geq 40$. (On laissera apparaître sur la figure les constructions utiles).

b. Résoudre l'inéquation $N(t) \geq 40$ par le calcul (on pourra poser $X = e^{-0,01t}$).

Correction



Partie A

1. $Z'(t) = -0,02Z(t)$, $Z(0) = Z_0$: on applique le cours, $Z(t) = Ce^{-0,02t}$; avec $Z(0) = Z_0$, on a $C = Z_0$ et $Z(t) = Z_0 e^{-0,02t}$. La fonction $Z(t) = Z_0 e^{-0,02t}$ est décroissante : $Z'(t) = -0,02Z_0 e^{-0,02t} < 0$.

2. a. $N(t) = f(t)e^{-0,01t} \Rightarrow N'(t) = f'(t)e^{-0,01t} - 0,01f(t)e^{-0,01t}$ d'où en remplaçant :

$N'(t) = Z(t) - 0,01N(t) \Leftrightarrow f'(t)e^{-0,01t} - 0,01f(t)e^{-0,01t} = Z_0 e^{-0,02t} - 0,01f(t)e^{-0,01t}$, soit finalement :

$$f'(t)e^{-0,01t} = Z_0 e^{-0,02t} \Leftrightarrow f'(t) = Z_0 e^{-0,02t} e^{0,01t} = Z_0 e^{-0,01t}.$$

b. On intègre $f'(t) = Z_0 e^{-0,01t}$: $f(t) = \frac{1}{-0,01} Z_0 e^{-0,01t} + K = -100Z_0 e^{-0,01t} + K$ puis on remplace dans N :

$$N(t) = f(t)e^{-0,01t} = [-100Z_0 e^{-0,01t} + K]e^{-0,01t} = -100Z_0 e^{-0,02t} + Ke^{-0,01t}.$$

Comme $N(0) = 0$, on a $-100Z_0 + K = 0 \Leftrightarrow K = 100Z_0$ et finalement en mettant $100Z_0$ en facteur :

$$N(t) = 100Z_0 (e^{-0,01t} - e^{-0,02t}).$$

Partie B $N(t) = 200(e^{-0,01t} - e^{-0,02t})$.

1. $N(t) = 200(e^0 - e^0) = 0$.

2. a. Lorsque t tend vers $+\infty$, $e^{-0,01t}$ et $e^{-0,02t}$ tendent vers 0 car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

b. La courbe C a une asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 0$.

3. a. $N'(t) = 200(-0,01e^{-0,01t} + 0,02e^{-0,02t}) = 200e^{-0,02t}(-0,01e^{0,01t} + 0,02)$.

b. $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 200e^{-0,02t}(0,02 - 0,01e^{0,01t}) = 0$ or $e^{-0,02t}$ n'est jamais nulle, donc on résoud :

$$0,02 - 0,01e^{0,01t} = 0 \Leftrightarrow -0,01e^{0,01t} = -0,02 \Leftrightarrow e^{0,01t} = \frac{-0,02}{-0,01} = 2 \Leftrightarrow 0,01t = \ln 2 \Leftrightarrow t = 100 \ln 2 \Rightarrow t_0 \approx 69,3.$$

c. $e^{-0,02t}$ est toujours strictement positif, on résoud donc

$$0,02 - 0,01e^{0,01t} \geq 0 \Leftrightarrow -0,01e^{0,01t} \geq -0,02 \Leftrightarrow e^{0,01t} \leq \frac{-0,02}{-0,01} = 2 \Leftrightarrow 0,01t \leq \ln 2 \Leftrightarrow t \leq 100 \ln 2.$$

Par ailleurs $N(t_0) = 200(e^{-0,01 \times 100 \ln 2} - e^{-0,02 \times 100 \ln 2}) = 200(e^{-\ln 2} - e^{-2 \ln 2}) = 200\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 50$.

On a donc le tableau



t	0	100ln2	$+\infty$
$N'(t)$	+	0	-
$N(t)$	0	50	0

4.

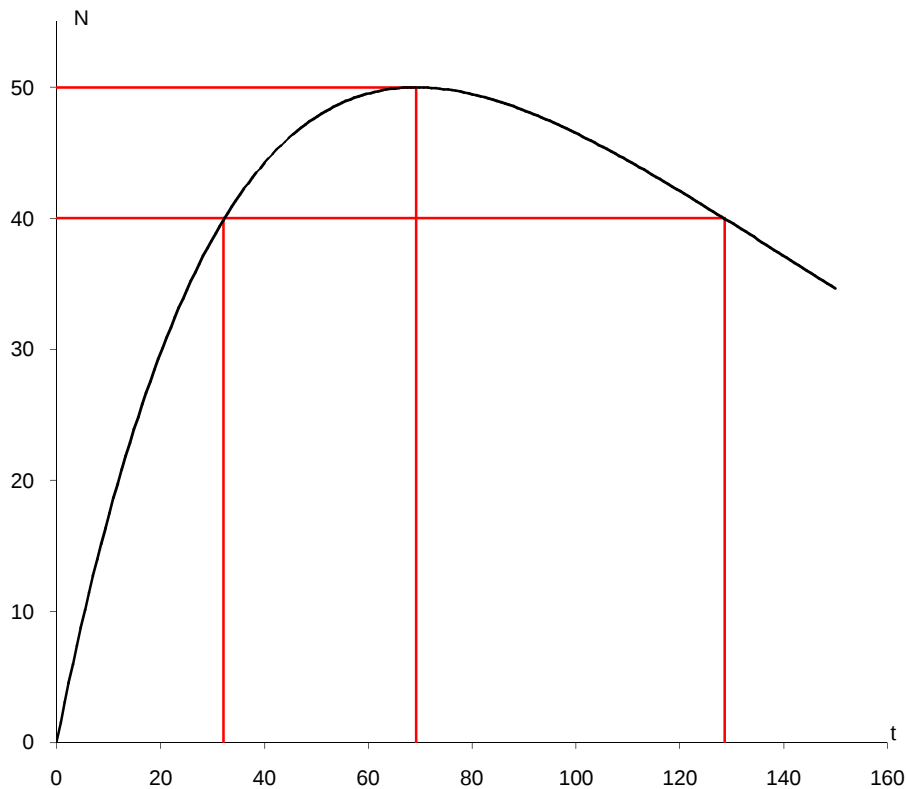
5. a. Comme on le voit ci-dessus et avec l'aide de la calculatrice, on a $N(t) \geq 40$ lorsque $32,2 \leq t \leq 128,7$.

b. $N(t) \geq 40 \Leftrightarrow 200(e^{-0,01t} - e^{-0,02t}) \geq 40 \Leftrightarrow e^{-0,01t} - e^{-0,02t} - 0,2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-0,02t} - e^{-0,01t} + 0,2 \leq 0$.

On pose donc $X = e^{-0,01t}$, ce qui donne $X^2 - X + 0,2 \leq 0$; les racines sont $X_1 = \frac{1+\sqrt{0,2}}{2}$, $X_2 = \frac{1-\sqrt{0,2}}{2}$, soit l'intervalle solution :

$$X_1 \leq X \leq X_2 \Leftrightarrow X_1 \leq e^{-0,01t} \leq X_2 \Leftrightarrow \ln X_1 \leq -0,01t \leq \ln X_2 \Leftrightarrow -100 \ln X_1 \geq t \geq -100 \ln X_2.$$

Le calcul donne alors $-100 \ln X_2 \approx 32,35$ et $-100 \ln X_1 \approx 128,59$.



1. 2. Equation différentielle ROC

5 points



1. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $f(x) = Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

b. En faisant un changement de variable de la forme $y = \varphi(Y)$ dans l'équation précédente on obtient l'équation $Y' = 2aY + 2b\sqrt{Y}$. Quelle est la fonction φ à votre avis ?

2. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (1) : $y' + y = 2e^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x , dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' + y = 0$.

On considère l'équation différentielle (1) : $y' + y = 2e^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x , dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$. Trouver les valeurs de α et β telles que h soit solution de l'équation (1).

3. On admet que toute solution de (1) s'écrit sous la forme $g + h$, où g désigne une solution de l'équation (2).

a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

b. Déterminer la solution f de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $f(0) = -1$.

c. Quelle est la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? Vers $-\infty$? Dresser le tableau de variation de f .

Correction

1. b. Comme il y a une racine dans $Y' = 2aY + 2b\sqrt{Y}$ on peut se dire que $y = \varphi(Y) = \sqrt{Y}$: dérivons $y' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}}$, ce qui donne dans $y' = ay + b \Leftrightarrow \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = a\sqrt{Y} + b \Leftrightarrow Y' = 2aY + 2b\sqrt{Y}$. Ok.

2. 1. $y' + y = 0$ a pour solutions $y = Ce^{-x}$.

2. $h(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x} \Rightarrow h'(x) = (\alpha - \alpha x - \beta)e^{-x} \Rightarrow (\alpha - \alpha x - \beta)e^{-x} + (\alpha x + \beta)e^{-x} = 2e^{-x}$ d'où par identification : $\alpha = 2$ et β quelconque, par exemple 0, soit $h(x) = 2xe^{-x}$.

3. a. $y = g + h \Rightarrow y = Ce^{-x} + 2xe^{-x} = (C + 2x)e^{-x}$.



b. $f(0) = C = -1 \Rightarrow f(x) = (2x - 1)e^{-x}$.

c. Lorsque x tend vers $+\infty$, f tend vers 0 (croissances comparées) ; Vers $-\infty$, f tend vers $-\infty$ car $2x - 1$ tend vers $-\infty$ et e^{-x} vers $+\infty$. $f'(x) = -f(x) + 2e^{-x} = (3 - 2x)e^{-x}$.

x	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
Variation de f	$-\infty$	$2e^{-1,5}$	0

1. 3. ROC+eq. diff., Am. du Sud remplit 2007

4 points

1. Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant : La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.

Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E₀).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.



Correction

a. $f'(x) = ae^{ax} = af(x)$ donc $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = 0 \Rightarrow h(x) = K$.

c. $h(x) = K = g(x)e^{-ax} \Rightarrow g(x) = Ke^{ax}$.

2. $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$ si

a. $f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos x \Leftrightarrow -a \sin x + b \cos x = 2(a \cos x + b \sin x) + \cos x \Rightarrow \begin{cases} -a = 2b \\ b = 2a + 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{5}, a = -\frac{2}{5}$.

b. $y' = 2y$ a pour solutions $y = Ke^{2x}$.

c. f est solution de (E) si et seulement si $\begin{cases} f' = 2f + \cos x \\ f_0' = 2f_0 + \cos x \end{cases} \Leftrightarrow f' - f_0' = 2(f - f_0)$, soit $f - f_0$ solution de (E₀).

d. Les solutions de (E) sont données par $f - f_0 = Ke^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \left(-\frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x\right) + Ke^{2x}$.

e. $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{2}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{\pi}{2}\right) + Ke^{\frac{2\pi}{2}} = \frac{1}{5} + Ke^{\pi} = 0 \Leftrightarrow K = -\frac{1}{5}e^{-\pi}$.

1. 4. 2Population de rongeurs, France 2005

6 points

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.

a. Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.



b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de la fonction f .

PARTIE B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t , est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle $(E_1) \quad y' = \frac{y}{4}$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E_1) .

b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel t positif ou nul, où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u .

a. On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement

si la fonction h satisfait aux conditions $(E_2) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$ pour tout nombre réel t positif ou

nul, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h .

b. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h , puis celle de la fonction u .

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Correction

PARTIE A

a. On multiplie en haut et en bas par $e^{-\frac{x}{4}}$:
$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}e^{-\frac{x}{4}}}{e^{-\frac{x}{4}}\left(2 + e^{\frac{x}{4}}\right)} = \frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}} + 1}.$$

b. Lorsque x tend vers $+\infty$, $e^{-\frac{x}{4}}$ tend vers 0 donc f tend vers $\frac{3}{0+1} = 3$; lorsque x tend vers $-\infty$, $e^{-\frac{x}{4}}$ tend vers $+\infty$ donc f tend vers 0.

Limites vraiment simples en utilisant la deuxième forme de f .

c. On peut remarquer que $e^{-\frac{x}{4}}$ est décroissante et que la fonction inverse l'est également ; on a alors une fonction croissante : $a \leq b \Rightarrow e^{-\frac{a}{4}} \geq e^{-\frac{b}{4}} \Rightarrow 2e^{-\frac{a}{4}} + 1 \geq 2e^{-\frac{b}{4}} + 1 \Rightarrow \frac{3}{2e^{-\frac{a}{4}} + 1} \leq \frac{3}{2e^{-\frac{b}{4}} + 1} \Rightarrow f(a) \leq f(b).$

Avec la dérivée :
$$f'(x) = 3 \frac{-\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)'}{\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = 3 \frac{-\left(-2\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\right)}{\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = 3 \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{4}}}{\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} > 0.$$

Attention à bien utiliser la dérivée de $1/u$, soit $-u'/u^2$.

PARTIE B



1. a. $y' = \frac{y}{4}$ a pour solutions $y = Ce^{\frac{1}{4}t}$.

b. Avec $g(0) = 1$ on a $y(0) = Ce^{\frac{1}{4} \cdot 0} = C = 1$ d'où $g(t) = e^{\frac{1}{4}t}$.

c. $g(t) = e^{\frac{1}{4}t} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}t \geq \ln 3 \Leftrightarrow t \geq 4 \ln 3 \approx 4,4$ d'où environ 4 ans et 5 mois. Après 5 années on est sûr que la population dépassera les 300 individus.

Cette première partie ne présente pas de difficulté. Attention aux unités quand même.

2. $(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$

a. $h = \frac{1}{u} \Rightarrow h' = -\frac{u'}{u^2}$. Or le système (E₂) devient en divisant par u^2 :
$$\begin{cases} \frac{u'(t)}{u^2(t)} = \frac{1}{4} \frac{1}{u(t)} - \frac{1}{12}, \text{ soit} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h'(t) = \frac{1}{4} h(t) - \frac{1}{12} \\ h(0) = \frac{1}{u(0)} = 1 \end{cases}$$



b. $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ a pour solutions $y = Ce^{-\frac{1}{4}t} - \frac{1/12}{-1/4} = Ce^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$. On a donc $h(t) = Ce^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$ et avec $h(0) = 1$, on tire $C + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{3}$. La solution u est donc $u(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2e^{-\frac{1}{4}t} + 1}$, où l'on

retrouve la fonction de la partie A.

c. Lorsque t tend vers $+\infty$ u se comporte comme f et tend vers 3, la population de rongeurs se stabilise donc vers 300 individus.

Le modèle ici présenté est classique et avait été donné sous une forme différente (et plus compliquée) en 2003. L'équation différentielle initiale provient du mécanisme suivant : on a

$u'(t) = \frac{1}{12}u(t)(3 - u(t))$, la population croît, donc u est positif et inférieur à 3 ; le terme $\frac{3}{12}u$ est la croissance exponentielle de la population, le terme $3 - u(t)$ tend vers 0 donc u tend vers 3. C'est l'équation *logistique* que l'on retrouve dans d'autres situations physiques (comme des réactions chimiques).

1. 5. Equa diff : Populations+probas, Pondich. 2006

7 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à 1000. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle : (E) $y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y)$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f , dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle : (H) $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$.

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que pour tout t de $[0; +\infty[$:

$$f(t) = \exp\left(3 + C \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par $f(t) = \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$.

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

c. Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.



Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50% d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas. »

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

2. En déduire $P(T)$.

3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Correction

Partie A

1. Partons de $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$ et remplaçons g par $\ln f$, g' par $-f'/f$:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{20} \ln f(t) - \frac{3}{20} \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{20} f(t) (\ln f(t) - 3) \Leftrightarrow f'(t) = -\frac{1}{20} f(t) (3 - \ln f(t)). \text{ Ok !}$$

2. (H) $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$. Application directe du cours : $z = Ce^{\frac{1}{20}t} - \frac{-3/20}{1/20} = Ce^{\frac{1}{20}t} + 3$.

3. g est solution de (H) donc $g(t) = Ce^{\frac{1}{20}t} + 3$, soit $\ln f(t) = g(t) = Ce^{\frac{1}{20}t} + 3 \Leftrightarrow f(t) = \exp\left(Ce^{\frac{1}{20}t} + 3\right)$.

4. a. $\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ tend vers $+\infty$, $3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ tend vers $-\infty$, $\exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$ tend donc vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

b. $\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ a pour dérivée $\frac{1}{20}\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ donc



$$f'(t) = \left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]' \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) = -\frac{3}{20}\exp\left(\frac{t}{20}\right)\exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) < 0,$$

f est décroissante.

c.

$$\begin{aligned} \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) < 0,02 &\Leftrightarrow 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln 0,02 \Leftrightarrow \frac{3 - \ln 0,02}{3} < \exp\left(\frac{t}{20}\right) \\ &\Leftrightarrow \ln \frac{3 - \ln 0,02}{3} < \frac{t}{20} \Leftrightarrow t > 20 \ln \frac{3 - \ln 0,02}{3} \approx 16,69. \end{aligned}$$

Ainsi, selon ce modèle, au bout de 17 ans, la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus.

Partie B

1. D'après l'énoncé, $P(M) = 0,5$; $P_M(T) = 0,99$ et $P_{\bar{M}}(T) = 0,001$.

2. D'après la formule des probabilités totales, $P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$ donc

$$P(T) = 0,5 \times 0,99 + (1 - 0,5) \times 0,001 = 0,4955.$$

3. Pour savoir si un test est fiable, il faut calculer sa valeur prédictive, c'est-à-dire $P_T(M)$.

$$\text{Or } P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(T)} = \frac{0,5 \times 0,99}{0,4955} \approx 0,99899. \text{ Ce nombre n'est pas supérieur à } 0,999$$

donc le test n'est pas estimé fiable.