MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
UNION-DISCIPLINE-TRAVAIL

Etablissement : **COURS SECONDAIRE METHODISTE DE COCODY 01 BP 10431 Abidjan 01**
E-mail **csmcocody2@gmail.com**

ANNEE SCOLAIRE : **2023 / 2024**

DEVOIR DE NIVEAU DE MATHEMATIQUES

Classe : T D
Date : 11 Décembre 2023
Durée : 03h30

EXERCICE N°1 (2 Points)

Pour cet exercice, 3 réponses sont proposées une seule (1) est exacte. Ecris le numéro de chaque affirmation et la lettre donnant la bonne réponse.
Exemple : 5) a

<table>
<tr><th></th><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>Q_1</td><td>On tire au hasard 2 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'une après l'autre et sans remettre la première. Le nombre d'issues est :</td><td>63</td><td>992</td><td>1024</td></tr>
<tr><td>Q_2</td><td>La fonction f définie]0 ;+∞[sur par : f(x)=lnx + e admet pour primitive la fonction F(x)=</td><td>$x(e-1+\ln x)$</td><td>$\frac{\ln x}{x} + ex$</td><td>$ex - x.\ln x$</td></tr>
<tr><td>Q_3</td><td>A et B sont deux événements d'un univers E. Si p(A) = 0,18, p(B) = 0,48 alors p(A ∪ B) est égal à :</td><td>0,6</td><td>0,24</td><td>On ne peut calculer</td></tr>
<tr><td>Q_4</td><td>Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :
<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,5</td><td>0,25</td><td>0,25</td></tr></table>L'espérance mathématique de X est :</td><td>1,5</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

EXERCICE N°2 (2 Points)

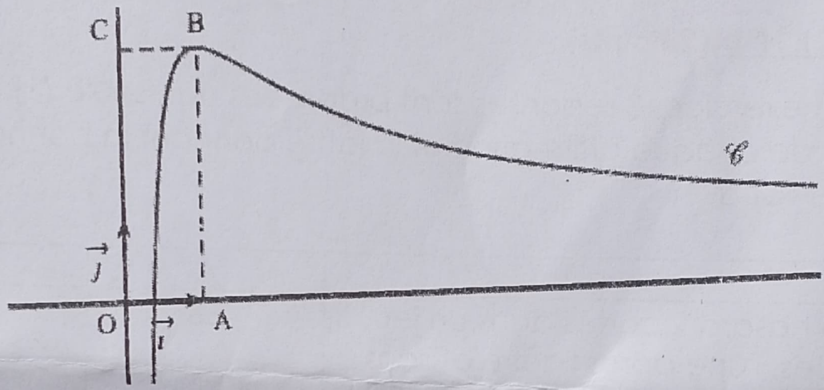
Ecris le numéro de chaque affirmation suivie de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse. Exemple : 5- VRAI

	Assertions
A_1	Une primitive de la fonction f telle : f(x) = $\ln x$ sur ℝ, est la fonction F telles que : F(x) = xlnx – x + 4

A_2	La droite (D) : y= 1-x est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$par : $f(x) = 1 - x + \frac{lnx}{x}$.
A_3	Le nombre ln 4 +$\ln\left(\frac{2}{e^5}\right)$ est négatif.
A_4	Si A a pour probabilité $\frac{5}{8}$, alors la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ est : -$\frac{5}{8}$.

<u>EXERCICE N°3</u> (2 points)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 3), (0 ; 3) ;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}$$

1) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.
3) En déduire les réels a et b.

EXERCICE N°4 (4 points)

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1) On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

   a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

   b) Calculer la probabilité des événements suivants :

      A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;

      B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;

      C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2) En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut. On prend au hasard un stylo dans la production. On note

   - D : « le stylo présente un défaut » ;
   - E : « le stylo est accepté après contrôle ».

   a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

   b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

   c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.

3) Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

   On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés après contrôle.

a) Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

b) Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1) b). Quel commentaire peut-on faire ?

EXERCICE N°5 (5 points)

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 - 2x \ln x$.
   a. Détermine son sens de variation.
   b. Déduis-en le signe de $f(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;2[\cup]2\ ;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln x}{(x-2)^2}$.

   On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
   a. Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
   Interprète graphiquement les résultats obtenus.
   b. Démontre que : pour tout x de $]0\ ;2[\cup]2\ ;+\infty[$, $g'(x) = \frac{f(x)}{x(x-2)^3}$.
   c. Détermine le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
   d. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
   e. Construis (C) et (T) dans le repère (O,I, J) (unité 2 cm).

EXERCICE N°6 (5 points)

Une usine fabrique et commercialise des sachets de poudre de cacao. Sa capacité journalière de production est comprise entre 1 000 et 3 000 sachets. On suppose que toute la production est commercialisée.
Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 3] par la fonction dérivée B' définie par : $B'(x) = x + 1 + \frac{2}{x}$.
Le Directeur de l'usine veut accroître le bénéfice de l'entreprise et la seule information dont il dispose est : pour une production de 1000 sachets, le bénéfice est de 3 500 000 francs. N'ayant pas de personnel qualifié, il te demande le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Détermine le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir un bénéfice maximal.