DS N° TERM D MATHEMATIQUES 2009-2010

EXERCICE 1 6 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

On désigne par i le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit A le point d'affixe $z_A = 1+\sqrt{3}i$.

a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.

b. Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c. Placer le point A dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On appelle z_B l'affixe du point B.

a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_B sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).

b. Écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

c. Placer le point B dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

3. Montrer que le triangle AOB est équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $z_C = z_A e^{i\pi/4}$.

a. Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image du point A ?
Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.

b. Placer le point C dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

c. Écrire le nombre complexe z_C sous forme trigonométrique.

d. Établir l'écriture du nombre complexe z_C sous forme algébrique.

e. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Problème – 14 points

Le plan est muni d'un repère orthormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 4 cm sur les axes . On s'intéresse dans ce problème, à la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x+2$. On note C sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-\ln x-x^2$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

1.a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 .Interpréter graphiquement cette limite .

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. Justifier que la droite D d'équation $y=-x+2$ est asymptote à la courbe C.

d. Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

2. a . Montrer que pour tout appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

b. Etablir le tableau de variation complet de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. a. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe C tel que la tangente en ce point soit Parallèle à l'asymptote D.

b. Déterminer une équation de la droite T, tangente à la courbe au point d'abscisse e.

4. a Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$.
On appelle B le point d'abscisse α.

b. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

c. Montrer que, sur l'intervalle $[2;3]$ l'équation $f(x)=0$ a une unique solution. notée β.

d. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution β

5. Dans le repère $]0;+\infty[$, voir annexe placer les points A et B puis tracer les droites D, T.

Partie C : Calcul d'une aire

Soit h la fonction définie sur]0 ; +∞[par $h(x)=(\ln x)^2$.

1. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.
En déduire une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle]0 ; +∞[.

2. On considère le domaine du plan *S* délimité par la droite d'équation *x* = 1, la droite d'équation $x=\sqrt{e}$, la courbe C et la droite *D*. Calculer, en unités d'aire puis en cm^2, la mesure de l'aire du domaine *S*.

Annexe