

## Corrigé

### Exercice 1 6 points

#### Partie A

$$1. z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0 : \Delta = b^2 - 4ac = (8\sqrt{3})^2 - 4 \times 64 = 192 - 256 = -64 = (8i)^2$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i.$$

Les racines sont donc :  $4\sqrt{3} + 4i$  et  $4\sqrt{3} - 4i$ .

$$2. \text{ on a : } |z_0^3| = |z_0|^3 = 2^3 = 8. \text{ De même } \arg z_0^3 = 3 \arg z_0 = 3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ on obtient donc } z_0 = 8e^{i\pi/2} = 8i$$

#### Partie B

$$1. \text{ Soit } z_B = 4\sqrt{3} + 4i. \text{ On a : } |z_B| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{48 + 16} = \sqrt{64} = 8 \text{ donc } |z_B| = 8$$

$$\text{ Soit } \theta_B = \arg z_B \text{ avec } \begin{cases} \cos \theta_B = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_B = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{ donc on obtient : } z_B = 4\sqrt{3} + 4i = r(\cos \theta_B + i \sin \theta_B) = 8 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 8e^{i\pi/6}$$

Comme  $z_C = \overline{z_B}$ , alors  $z_C = 8e^{-i\pi/6}$ . Un des arguments de  $z_C$  est  $z_C = -\pi/6 + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. Comme  $i$  le nombre complexe est : de module 1 et d'argument  $\pi/2$ .

On en déduit l'écriture exponentielle :  $z_A = 8i = 8e^{i\pi/2}$ .

3. a. L'écriture complexe de la rotation est :  $z' - z_0 = (z - z_0)e^{i\pi/3}$ , donc

$$z_D = z_A e^{i\pi/3} = 8e^{i\pi/2} \times e^{i\pi/3} = 8e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})} = 8e^{5\pi i/6} = 4(\cos(5\pi/6) + j \sin(5\pi/6)) = -4\sqrt{3} + 4i$$

4.a On place B sur le cercle de centre O et de rayon 8 et la droite d'équation  $y = 4$ .

b. Par définition de la rotation  $OA = OD$ , donc  $OAD$  est isocèle en O.

De plus  $(\overline{OA}; \overline{OD}) = \frac{\pi}{3}$  angle de rotation

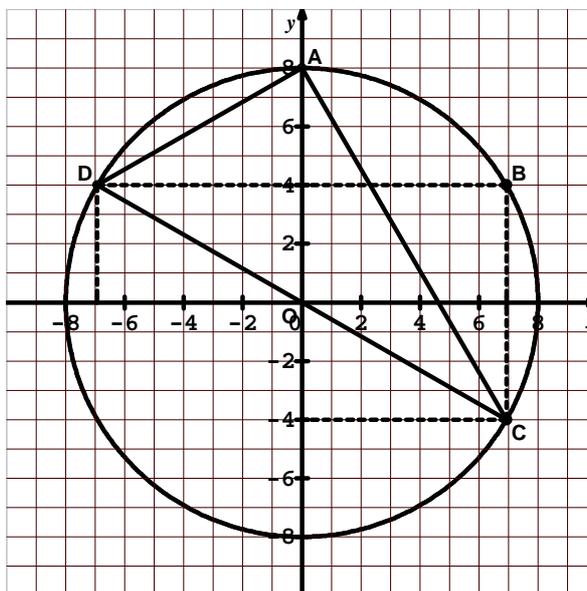
$$(\overline{OA}; \overline{OD}) = \arg(z_D - z_A) = (\overline{OA}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overline{OD}) = -(\vec{u}; \overline{OA}) + (\vec{u}; \overline{OD}) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

. Il en résulte que les angles à la base ont également une mesure égale à  $\frac{\pi}{3}$ . Il est donc équilatéral.

c. On a  $z_M = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 4i - 4\sqrt{3} + 4i}{2} = 0$ . Donc  $M \equiv O$  et O est le milieu de [CD].

d. D'après la question précédente [CD] est un diamètre du cercle de centre O et de rayon 8 ;

A étant un point de cercle ( $|z_A| = |8i| = 8|i| = 8$ ), le triangle ACD est donc rectangle en A.



**Exercice 2 : 4 points**

1. a. voir l'arbre ci-contre

b. Il y a 8 tirages donnant un nombre pair et 8 tirages donnant un multiple de 3, donc

$$p(M_2) = p(M_3) = \frac{8}{20} = \frac{4}{5}.$$

c. Les tirages multiples de 3 sont :

12 ; 15 ; 21 ; 24 ; 42 ; 45 ; 51 ; 54.

il faut supprimer les pairs : 12 ; 24 ; 42 ; 54 et

dans ceux qui restent les multiples de 5, soit 15 et 45.

Il reste donc 21 et 51. On a donc  $p(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ .

2. a. 13 ; 23 ; 31 ; 41 ; 43 ; 53 qui sont premiers donnant un gain de  $0-3 = -3$ .

14 ; 32 ; 34 ; 52 sont seulement pairs ; ils donnent un gain de  $2-3 = -1$ .

2 ; 24 ; 42 ; 54 sont pairs et multiples de 3 ; ils donnent un gain de  $2+3-3 = 2$ .

21 ; 51 sont multiples de 3, mais pas de 2 ni de 5 ; ils donnent un gain de  $3-3 = 0$ .

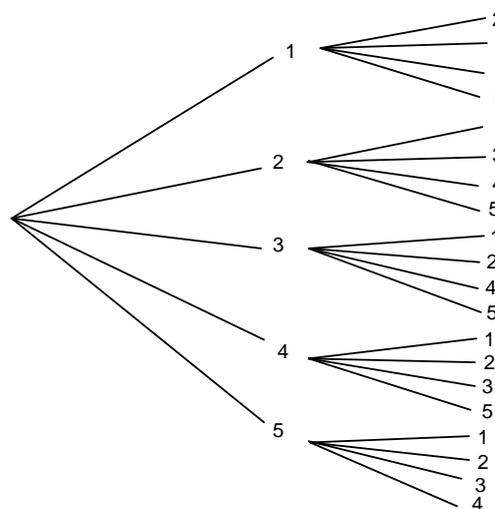
25 ; 35 sont multiples de 5, mais pas de 2 ni de 3 ; ils donnent un gain de  $5-3 = 2$ .

15 et 45 sont multiples de 3 et de 5 ; ils donnent un gain de  $3+5-3 = 5$ .

Donc  $X = \{-3; -1; 0; 2; 5\}$

b. Deux tirages (21 et 51) donnent un gain de 0 €; la probabilité  $p(X = 0) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$ .

c. On a le tableau suivant :



$X = k$	-3	-1	0	2	5
$p(X = k)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$

$$3. E(X) = -3 \times \frac{6}{20} - 1 \times \frac{4}{20} + 0 \times \frac{2}{20} + 2 \times \frac{6}{20} + 5 \times \frac{10}{20} = \frac{-18 - 4 + 12 + 10}{20} = \frac{0}{20} = 0.$$

L'espérance de gain étant nulle, le jeu est équitable.

**Exercice 3**

$$1^\circ) \text{ Etude de fonction } f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1} = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 7 - 3(x-1)}{x-1} = 0$$

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x-1} = 0; \Delta = 49 - 4 \times 1 \times 10 = 9 > 0$$

donc 2 racines réelles :  $x_1 = \frac{7-3}{2} = 2$  et  $x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$

La droite d'équation  $y = 3$  coupe la courbe représentative de  $f$  en deux points d'abscisses 2 et 5. A(2 ; 3) et B(5 ; 3) sont donc les deux points recherchés.

$$2^\circ) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4x + 7 = 1 - 4 + 7 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0^- \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 4x + 7 = 1 - 2 + 5 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

pour  $x \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = +\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$3^\circ) f'(x) = \frac{(2x-4)(x-1) - (x^2-4x+7) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - x^2 + 4x - 7}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$f'(x)$  est du signe de  $x^2 - 2x - 3$  car  $(x-1)^2$  sur  $]1 ; +\infty[$ . Calculons les racines du polynôme  $x^2 - 2x - 3$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0 ; \text{ donc 2 racines réelles : } x_1 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Ce polynôme admet deux racines réelles  $-1$  et  $3$  donc  $x^2 - 2x - 3$  est positif à l'extérieur de ces racines  $-1$  et  $3$  on en déduit le signe de  $f'(x)$  puis les variations de  $f$

$f$  admet un minimum en 3 qui est :  $f(3) = \frac{3^2 - 4 \times 3 + 7}{3-1} = \frac{9 - 12 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -6$	$\searrow -\infty$	$\nearrow +\infty$	$\searrow 2$	$\nearrow +\infty$

4) déterminons les équations réduites des tangentes ( $T_A$ ) et ( $T_B$ ) aux points d'abscisses 2 et 5 de la courbe :  
coefficient directeur de la tangente au point A :  $f'(2) = \frac{2^2 - 2 \times 2 - 3}{(2-1)^2} = \frac{4 - 4 - 3}{1} = -3$

Equation de la tangente au point A :  $y = f'(2)(x-2) + f(2)$  ;  $y = -3(x-2) + 3 = -3x + 6 + 3$  .

$(T_A) : y = -3x + 9$

coefficient directeur de la tangente au point B :  $f'(5) = \frac{5^2 - 2 \times 5 - 3}{(5-1)^2} = \frac{25 - 10 - 3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Equation de la tangente au point B:  $y = f'(5)(x-5) + f(5)$   $y = \frac{3}{4}(x-5) + 3$   $y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} + \frac{12}{4}$   $(T_B): y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

$$5 \quad x-3 + \frac{4}{x-1} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)} + \frac{4}{x-1} = \frac{x^2 - x - 3x + 3 + 4}{x-1} = \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1} = f(x) \text{ donc } f(x) = x-3 + \frac{4}{x-1}$$

$$f(x) - (x-3) = x-3 + \frac{4}{x-1} - (x-3) = \frac{4}{x-1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x-1 = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$ . donc la droite d'équation  $y = x-3$  est asymptote à  $C_f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$

6°) Position de la courbe  $C_f$  par rapport à l'asymptote (D') :

$x-1 < 0$  si et seulement si  $x < 1$  ;

$x-1 > 0$  si et seulement si  $x > 1$

$$f(x) - (x-3) = \frac{4}{x-1} < 0 \text{ sur } ]-\infty; 1[ ,$$

$C_f$  est strictement au dessous de la droite

(D) d'équation  $y = x-3$

$$\text{et } f(x) - (x-3) = \frac{4}{x-1} > 0 \text{ sur } ]1; +\infty[ ,$$

$C_f$  est strictement au dessus de la droite (D)

d'équation  $y = x-3$

7) Construction de la courbe  $C_f$  et des droites (D),  $(T_A)$ ,  $(T_B)$ .

