Correction

Exercice 1

$z_3 = \frac{2}{z_2} = \frac{2}{1-i} = 1+i$

$|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

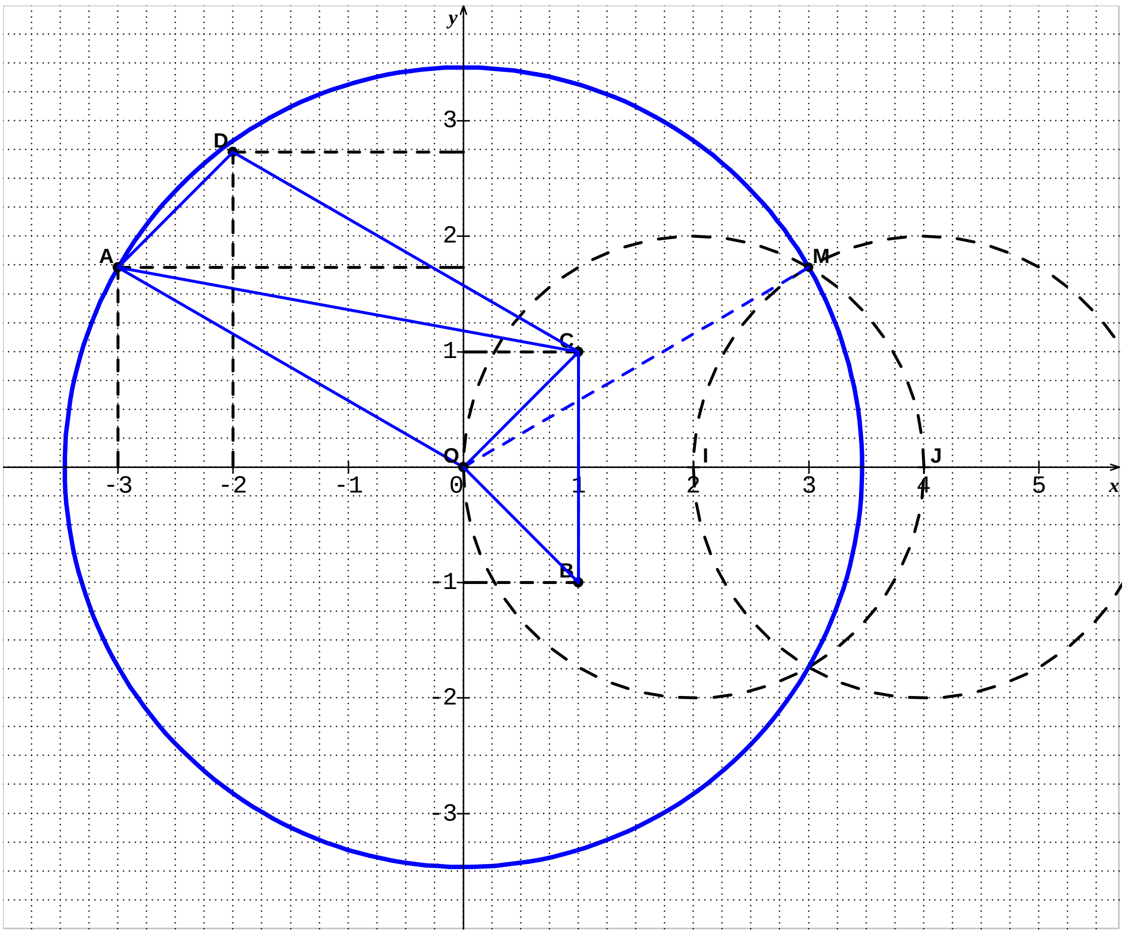
$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|z_3| = \left|\frac{2}{z_2}\right| = \frac{2}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

. $\theta_1 = \arg z_1 : \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

$\theta_2 = \arg z_2 : \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, donc $\theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$, comme $z_3 = \overline{z_2}$,

on a : $\arg z_2 = -\arg z_1 + 2k\pi$, donc $\theta_3 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$



On sait que $|z_2| = |z_3| = \sqrt{2}$, on déduit que le triangle BOC est isocèle en O.

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 1+i-(1-i) = 1+i-1+i = 2i$, donc $BC = |z_{\overrightarrow{BC}}| = 2$

$BC^2 = 4$ et $OB^2 + OC^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 2+2 = 4$, on déduit que $BC^2 = OB^2 + OC^2$ et par conséquent

Le triangle BOC est rectangle isocèle en O .
OADC est un parallélogramme signifie que $z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{OC}}$, donc $z_D - z_A = z_C$ ou encore
$z_D = z_C + z_A = 1 + i - 3 + i\sqrt{3} = -2 + (1+\sqrt{3})i$

Exercice 2

$x^2 - 4x - 5 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4\times(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$, donc 2 racines distinctes

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-6}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+6}{2} = 5$. $S_0 = \{-1;5\}$

2. $(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$, $\ln x$ est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on pose $X = \ln x$ et on obtient
$X^2 - 4X - 5 = 0$ et on a $X_1 = \ln x_1 = -1$ ou $X_2 = \ln x_2 = 5$

Donc $\ln x_1 = -1 = \ln\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1}{e}$ $\ln x_2 = 5\ln e = \ln e^5 \Leftrightarrow x_2 = e^5$, $S = \left\{e^5;\dfrac{1}{e}\right\}$

b. $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3\ln 2$. Cette équation est définie pour tout réel x tels que : $x-3>0$ et $x-1>0$
$x>3$ et $x>1$, donc elle est définie sur $]3;+\infty[$

$\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(x-3)(x-1) = \ln 2^3 = \ln 8 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$, donc $x_1 = -1$ ou $x_2 = 5$, donc une seule solution est acceptable

Puisque $x_1 = -1 \notin]0;+\infty[$, donc $S' = \{5\}$

Problème

PARTIE A : ***Etude de fonction f***

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x + 2 + \ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ .Il vient $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+2+\ln x)\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+2+\ln x)\times \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ .Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ alors l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C.

2)a) Pour tout x de $]0;+\infty[$ $f(x) = \dfrac{x}{x} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$ soit $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

c) On en déduit que la courbe C admet la droite d'équation x =1 comme asymptote au voisinage de $+\infty$ .voir courbe.

3)a) Pour tout x de $]0;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{(1+\frac{1}{x})x - (x+2+\ln x)}{x^2}$ $f'(x) = \dfrac{x+1-x-2-\ln x}{x^2}$. $f'(x) = \dfrac{-1-\ln x}{x^2}$

b) $f'(x) \geq 0$ $\dfrac{-1-\ln x}{x^2} \geq 0$ *et* $x \in]0;+\infty[$ $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $-1-\ln x \geq 0$ $\Leftrightarrow -\ln x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq -1$

$\Leftrightarrow x \leq e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$f'(x) \leq 0$ $\dfrac{-1-\ln x}{x^2} \leq 0$ *et* $x \in]0;+\infty[\Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Donc f '(x) s'annule en changeant de signe en $x = \dfrac{1}{e}$

c) Il en résulte le tableau de variation de f :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	$1+e$	↘ 1	

***PARTIE B* :**

1) g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x+2}{x}$

a) $g'(x)=\dfrac{x-(x+2)}{x^2}$; $g'(x)=\dfrac{-2}{x^2}$ Comme $g'(x)<0$ sur $]0;+\infty[$ alors la fonction g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

Il en résulte le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
$f(x)$		$+\infty \searrow 1$

b) La courbe H admet comme asymptote l'axe des ordonnées et la droite D.

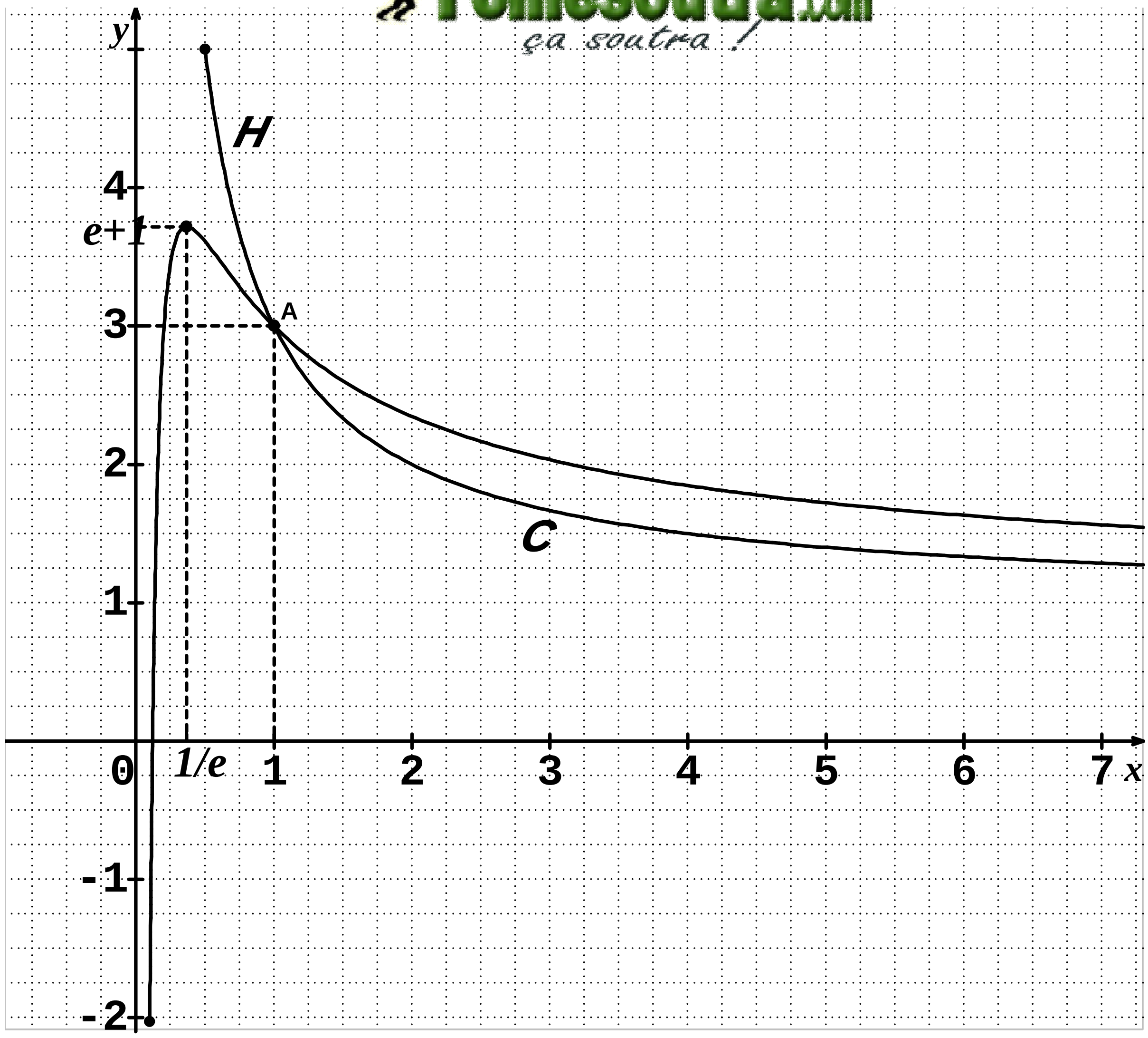
2)a) $f(x)-g(x)=\dfrac{x+2+\ln x-(x+2)}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x}$ Sur $]0;+\infty[$ $f(x)$-g(x) est du signe de $\ln x$

Donc $f(x)-g(x)\le 0 \Leftrightarrow 0<x\le 1$ et $f(x)-g(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

b) Les deux courbes C et H . se coupent en un point A d'abscisse 1, car $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

c) On en déduit que : C est au-dessous de H sur $]0;1]$ et C est au-dessus de H . sur $[1;+\infty[$

x	0,1	0,2	0,5	1	2	2,5	3	4	5	7	8
$g(x)$	21	11	5	3	2	1,8	1,7	1,5	1,4	1,29	1,25
$f(x)$	-2,03	2,95	3,61	3	2,35	2,2	2,03	1,85	1,72	1,56	1,51


y
H
4
e+1
A
3
2
C
1
0
1/e
1
2
3
4
5
6
7
x
-1
-2