Exercice 1 : Solution

1.

2. a) On note A l'événement « obtenir un couple de nombres pairs »

On cherche dans le tableau les couples de nombres pairs : $\{(2;2),(2;4),(4;2),(4;4)\}$

Il y a donc 4 couples favorables sur les 16 couples disponibles et on a donc

$p(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

		1er tirage			
		1	**2**	**3**	**4**
2^{ième} tirage	**1**	$(1;1)$	$(2;1)$	$(3;1)$	$(4;1)$
	2	$(1;2)$	$(2;2)$	$(3;2)$	$(4;2)$
	3	$(1;3)$	$(2;3)$	$(3;3)$	$(4;3)$
	4	$(1;4)$	$(2;4)$	$(3;4)$	$(4;4)$

b) On note B l'événement « obtenir un couple de nombres impairs »

On cherche dans le tableau les couples de nombres pairs : $\{(1;1),(1;3),(3;1),(3;3)\}$

Il y a donc 4 couples favorables sur les 16 couples disponibles et on a donc $p(B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

c) On note C l'événement « obtenir un couple de nombres de parité différente »

l'événement « obtenir un couple de nombres de parité différente » est l'événement contraire de D={ « obtenir un couple de nombres pairs » et « obtenir un couple de nombres impairs »}

Donc $p(D)=p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, puisque les événements A et B sont disjoints

Donc $p(C)=1-p(D)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

3. a) événement A : $X=8-2=6$; événement B : $X=4-2=2$; événement C : $X=-4-2=-6$

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs suivantes : $6;2;-6$

b)

$X=x_i$	-6	2	6
$p(X=x_i)$	$p(C)=\frac{1}{2}$	$p(B)=\frac{1}{4}$	$p(A)=\frac{1}{4}$

c) $E(X)=-6\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{4}=-3+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=-1$

d) Le jeu n'est pas équitable puisque en moyenne on perd 1€

Soit $G'=m-G$; $E(G')=E(m-G)=m-E(G)=m-1$, soit $E(G')=0\Leftrightarrow m=1$

il faudrait que la mise soit un 1 euro moins chère , donc une mise de 1euros ($2-1=1$€) pour que l'espérance soit égale à 0.

AUTRE METHODE

$X=x_i$	$-4-m$	$4-m$	$8-m$
$p(X=x_i)$	$p(C)=\frac{1}{2}$	$p(B)=\frac{1}{4}$	$p(A)=\frac{1}{4}$

$E(G')=(-4-m)\times\frac{1}{2}+(4-m)\times\frac{1}{4}+(8-m)\times\frac{1}{4}=m-1$. $E(G')=0$ équivaut à $m-1=0$ soit $m=1$€.

Pour que le jeu soit équitable il faut une mise de 1€ .

Exercice 3

1-Lorsqu'un ordinateur est en panne , cela peut provenir :

Soit d'un seul composant en panne : il y a dans ce cas trois diagnostics possibles symbolisés par :

$(\overline{A};CG;P)$; $(A;\overline{CG};P)$; $(A;CG;\overline{P})$

Soit de deux composants en panne : il y a dans ce cas trois diagnostics possibles symbolisés par :

$(\overline{A};\overline{CG};P)$; $(\overline{A};CG;\overline{P})$; $(A;\overline{CG};\overline{P})$. Soit des trois composants en panne simultanément: c'est le cas $(\overline{A};\overline{CG};\overline{P})$.

Donc on a : E = $\{ (\overline{A};CG;P)$; $(A;\overline{CG};P)$; $(A;CG;\overline{P})$; $(\overline{A};\overline{CG};P)$; $(\overline{A};CG;\overline{P})$; $(A;\overline{CG};\overline{P})$; $(\overline{A};\overline{CG};\overline{P}) \}$

2- soit B l'événement « un seul composant est en panne » cet événement est formé de trois issues favorables
L'univers E est formé de sept issues possibles .Puisqu'on suppose l'équiprobabilité de sept diagnostics
On a donc : $P(B) = 3/7$.

3.a) Si seule l'alimentation est en panne, le coût de la réparation est 80 + 25 = 105 €.
Si seule la carte graphique est en panne, le coût de la réparation est 160 + 25 = 185 €.
Si seul le processeur est en panne, le coût de la réparation est 80 + 25 = 105 €.
Si l'alimentation et la carte graphique sont en panne, le coût de la réparation est 80 +160+ 25 = 265 €.
Si l'alimentation et le processeur sont en panne, le coût de la réparation est 80 +80+ 25 = 185 €
Si la carte graphique et le processeur sont en panne, le coût de la réparation est 180 +80+ 25 = 265 €.
Si les trois composants sont en panne, le coût de la réparation est : 80+160+80+25 = 345 €.
Donc la liste des valeurs possibles de X est : $X = \{ 105 ; 185 ; 265 ; 345 \}$

3.b) Pour 105 €, on a deux cas favorables : $(\overline{A};CG;P)$ et $(A;CG;\overline{P})$, donc $P(X=105) = \frac{2}{7}$.

Pour 185 €, on a deux cas favorables : $(A;\overline{CG};P)$ et $(\overline{A};CG;\overline{P})$, donc $P(X=185) = \frac{2}{7}$

Pour 265 €, on a deux cas favorables : $(\overline{A};\overline{CG};P)$ et $(A;\overline{CG};\overline{P})$, donc $P(X=265) = \frac{2}{7}$

Pour 345 €, on a un seul cas favorable : $(\overline{A};\overline{CG};\overline{P})$, donc $P(X=345) = \frac{1}{7}$.

3.c) $E(X) = \sum_{1}^{4} x_i \times P(X = x_i)$, donc $E(X) = 105 \times \frac{2}{7} + 185 \times \frac{2}{7} + 265 \times \frac{2}{7} + 345 \times \frac{1}{7}$

$E(X) = \frac{210+370+530+345}{7} = \frac{1455}{7} \approx 208€$. le coût moyen de réparation est 208 € .

$X = x_i$	105	185	265	345
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

3.d) le prix moyen d'une réparation est de 208 € pour un forfait de 25 €. Si on diminue ce forfait 8 € le prix moyen de réparation va passer à 200 € .En effet : dans ce cas X prend 97 ; 177 ; 257 ; 337

On a alors : $E(X) = 97 \times \frac{2}{7} + 177 \times \frac{2}{7} + 257 \times \frac{2}{7} + 337 \times \frac{1}{7}$; $E(X) = \frac{194+314+514+337}{7} = \frac{1399}{7} \approx 200€$

$E(X) = (80+c) \times \frac{2}{7} + (160+c) \times \frac{2}{7} + (240+c) \times \frac{2}{7} + (320+c) \times \frac{1}{7}$. $7E(X) = (80+c) \times 2 + (160+c) \times 2 + (240+c) \times 2 + (320+c)$

$7 \times 200 = 160+160+480+320+2c+2c+2c+c$; $1400 = 7c + 1280$ soit $7c = 1400 - 1280 = 120$ et $c = \frac{120}{7} \approx 17€$

<u>Problème</u>

<u>Partie A</u>

$g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c$

$A \in \mathcal{C}$, donc les coordonnées du point A vérifie l'équation de g :

$g(1) = a(\ln 1)^2 + b\ln 1 + c = 2$; $\ln 1 = 0$, donc $c = 2$, de même $B \in \mathcal{C}$, on a :

$g(e) = a(\ln e)^2 + b\ln e + c = 0 \Rightarrow a + b + 2 = 0$, puisque $\ln e = 1$

$C \in \mathcal{C} \Rightarrow g(e^2) = a(\ln e^2)^2 + b\ln e^2 + c = 0 \Rightarrow a(2\ln e)^2 + 2b\ln e + 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b + 2 = 0$

On doit résoudre un système d'équation linéaire à deux inconnues : $\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 et b = -3$

<u>Partie B</u>

Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2$

1.a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left((\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right)$ or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -3\ln x = +\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$. La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x\left((\ln x)-3\right)+2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\ln x)-3\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3.a *f* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$; $f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2$ $f'(x) = 2\times\frac{1}{x}\times\ln x - 3\times\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x} - \frac{3}{x}$.

(car $(u^2)' = 2u'u$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$) pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2\ln x - 3}{x}$.

3.b variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2\ln x - 3}{x}$ $x \in]0\,;+\infty[$, donc $x > 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{3/2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2\ln x > 3 \Leftrightarrow \ln x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{3/2}$

$f(e^{3/2}) = (\ln e^{3/2})^2 - 3\ln(e^{3/2}) + 2 = (3/2\ln e)^2 - 3\times\frac{3}{2}\ln e + 2$

$= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9-18+8}{8} = -\frac{1}{4}$

x	0		$e^{3/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$+\infty$

c. d'après 1.b, on a : $f(x) = 0$ si $x = e$ ou $x = e^2$ .En regardant le tableau de variation , on peut en déduire le signe de *f* sur $]0\,;+\infty[$.

$f(x) > 0$ pour $x \in]0;e[\cup]e^2;+\infty[$; $f(x) < 0$ pour $x \in]e;e^2[$; $f(x) = 0$ pour $x = e$ et $x = e^2$.

3. a. $x^2 - 3x + 2 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times1\times2 = 9 - 8 = 1$; $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$. $S = \{1;2\}$

b. sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, résolvons l'équation $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$. Posons $X = \ln x$ .l'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$. On a vu que $X = 1$ ou $X = 2$.

$\ln x_1 = 1 = \ln e \Leftrightarrow x_1 = e$ $\ln x_1 = 2 = 2\ln e = \ln e^2 \Leftrightarrow x_1 = e^2$ $S = \left\{e;e^2\right\}$.

c. $f(x) = (\ln x - 1)(\ln x - 2)$

x	0		e		e^2		$+\infty$
$\ln x - 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 2$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Equation de la tangente T à la tangente à la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$:

$y = f'(e)(x-e) + f(e)$; $f'(\sqrt{e}) = \frac{2\ln(e)-3}{e} = \frac{2-3}{e} = -\frac{1}{e}$;

$f(e) = \left(\ln e\right)^2 - 3\ln e + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$; $y = \frac{-1}{e}(x-e) = \left(\frac{-1}{e}\right)x + 1$, donc (T) : $\boxed{y = \frac{-1}{e}x + 1}$.

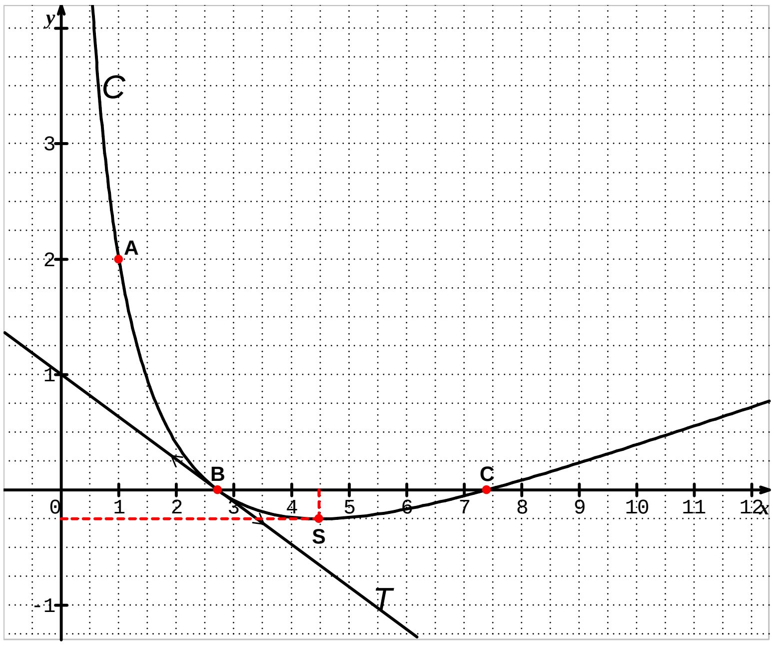
5.a. voir courbe ci-contre

b. Calculons $F'(x)$. $H(x) = x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 5x$

$$F'(x)=(\ln x)^2+\frac{2x\times\ln x}{x}-5\ln x-5x\times\frac{1}{x}+5$$

$F'(x)=(\ln x)^2+2\ln x-5\ln x-5+5$ d'où

$F'(x)=(\ln x)^2-3\ln x+2=f(x)$,



6. $H(x)=x(\ln x)^2-5x\ln x+5x$

$H(e^2)=e^2\left(\ln e^2\right)^2-5e^2\ln e^2+5e^2$

$=e^2(2\ln e)^2-10e^2+5e^2$

$=4e^2-5e^2=-e^2$

$H(e)=e\left(\ln e\right)^2-5e\ln e+5e=e-5e+5e=e$.

$A=H(e^2)-H(e)=-e^2-e$