DS 4 MATHEMATIQUES TERMINALE D 2008-2009

Exercice 1 –5 points

Une urne contient quatre boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4.Une expérience aléatoire se déroule de la manière suivante : On tire au hasard une première boule de l’urne et on note son numéro. Après avoir remis cette boule dans l’urne, on en tire au hasard une seconde dont on note aussi le numéro. À l’issue de cette expérience, on obtient un couple de nombres (on rappelle que, par exemple, le couple (2 ; 3) est différent du couple (3 ; 2)).

1. À l’aide d’un arbre ou d’un tableau, établir la liste des 16 couples possibles.

2.a. On note A l’évènement « obtenir un couple de nombres pairs ».
Déterminer la probabilité de l’évènement A

b. On note B l’évènement « obtenir un couple de nombres impairs ».
Calculer la probabilité de l’événement B.

c. On note C l’évènement « obtenir un couple de nombres de parité différente ».
Calculer la probabilité de l’évènement C.

3. On organise un jeu. Un joueur mise 2 euros et réalise ensuite l’expérience aléatoire décrite ci-dessus.
− Si l’évènement A est réalisé, le joueur reçoit 8 euros de l’organisateur du jeu ;
− Si l’évènement B est réalisé, le joueur reçoit 4 euros de l’organisateur du jeu ;
− Si l’évènement C est réalisé, le joueur donne 4 euros à l’organisateur du jeu.
On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.
Par exemple, s’il obtient le couple (2 ; 2), son gain est 6 euros.
a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
c. Calculer l’espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
d. On dit qu’un jeu est équitable lorsque l’espérance de gain est nulle.
Quelle aurait du être la mise du joueur pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 2- 5 points

Dans un atelier de réparation un technicien s'occupe des ordinateurs en panne qui lui arrivent.
Les composants à l'origine de la panne peuvent uniquement être:
l'alimentation, la carte graphique ou le processeur.
Une panne simultanée de deux ou trois composants est possible. Le technicien chargé de la détection des pannes établit le diagnostic d'un ordinateur à l'aide d'un triplet utilisant les initiales des composants, surmontées d'une barre en cas de panne. Par exemple: $(A; CG; \overline{P})$ signifie que l'alimentation et la carte graphique fonctionnent et que la panne provient du processeur.

1. Établir la liste des sept diagnostics possibles sur un ordinateur en panne.
2. On suppose que les sept diagnostics ont la même probabilité d'être établis.
Quelle est la probabilité pour qu'un seul des composants soit en panne ?
3. le tableau suivant donne le coût des composants à remplacer :Le coût d'une réparation est celui du remplacement des pièces auquel il faut ajouter un forfait de main-d'œuvre de 25 € indépendant du nombre de composants à Remplacer.

composant	alimentation	carte graphique	processeur
prix en €	80	160	80

3.a. Soit X la variable aléatoire qui à chaque ordinateur en panne associe le coût de la réparation.
Donner la liste des valeurs possibles de X.
3.b. Donner dans un tableau la loi de probabilité de *X*.
3.c. Calculer l'espérance mathématique de *X*. Arrondir le résultat à l'unité.
3.d. Quel devrait être le coût du forfait de la main-d'œuvre, arrondi à l'unité, pour que le prix moyen

d'une réparation soit de 200 € ?

Problème 10 points

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A: Recherche d'une fonction

Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x)=a(\ln x)^2+b\ln x+c$, où a, b et c sont trois réels.
Déterminer a, b et c sachant que sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ passe par les points A(1 ; 2), B (e ; 0) et C (e^2 ; 0).

Partie B: Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x)=(\ln x)^2-3\ln x+2$.

1. a. Calculer la limite de f en 0.

   b. Calculer la limite de f en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a : $f(x)=\ln x(\ln x-3)+2$

2. a. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

   c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue X : $X^2-3X+2=0$.

   b. En déduire les solutions exactes dans $]0;+\infty[$ de l'équation : $f(x)=0$.

   c. Déduire, des questions 2.c. et 3.b, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

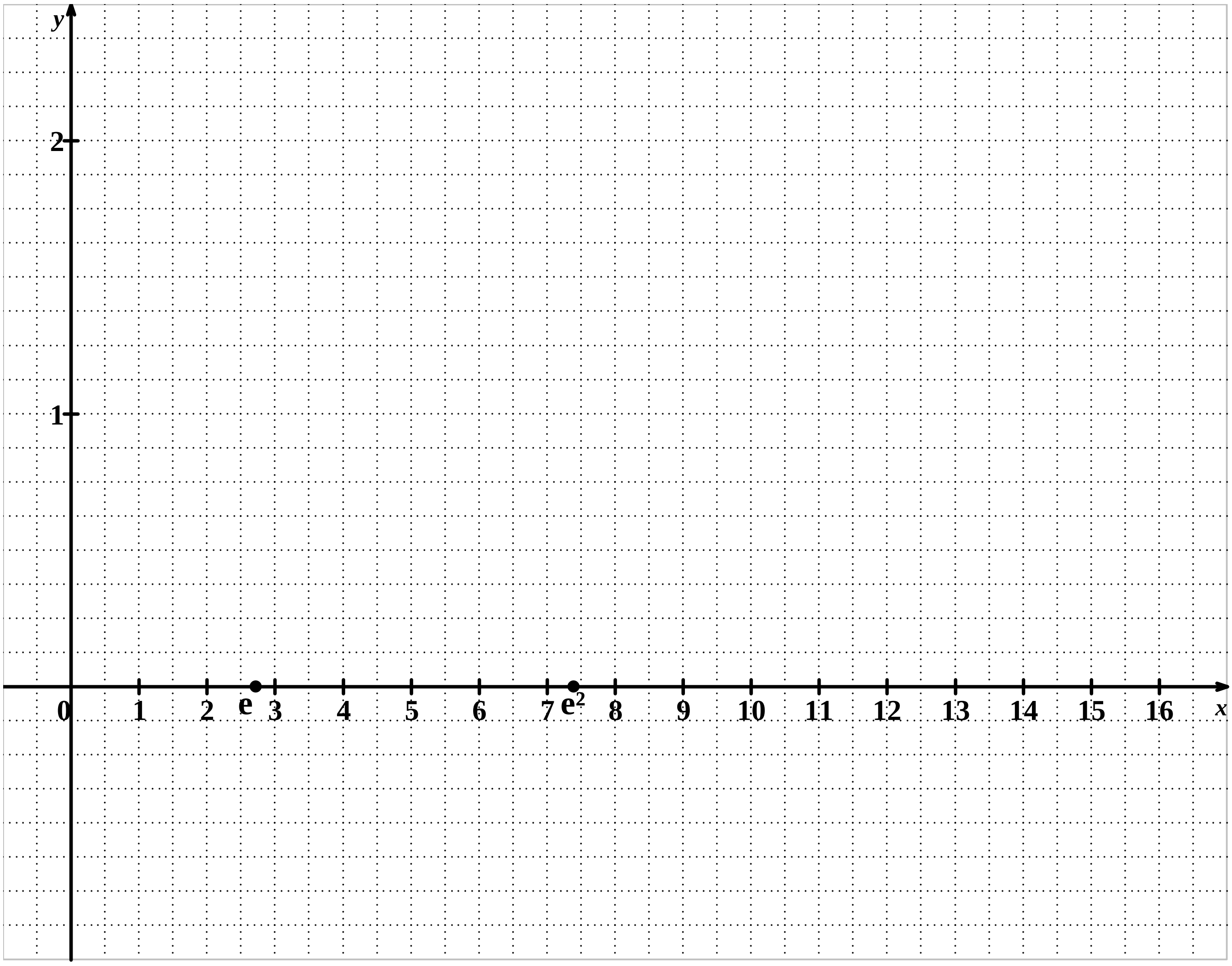
4. On note Γ la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

   a. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe Γ au point d'abscisse e.

   b. Tracer la courbe Γ et la tangente (Δ).

5. Soit H la fonction définie sur $]0;+\infty[$, par : $H(x)=x(\ln x)^2-5x\ln x+5x$
   Calculer $H'(x)$ et conclure .

6. calculer le nombre $A=H(e^2)-H(e)$.



PROBLEME

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I =] 0; $+\infty$ [par : $g(x) = \ln x - 1 - \dfrac{9}{2}x^2$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$. Etudier son signe sur] 0; $+\infty$ [.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
3. En déduire pour tout $x \in]\,0\,;+\infty[$ le signe de $g(x)$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur] 0 ; $+\infty$[par : $f(x) = -9x + 5 - \dfrac{2\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).

4.soit (Δ) la droite d'équation $y = -9x + 5$. On considère la fonction h définie sur]0 ; $+\infty$[

par $h(x) = f(x) - (-9x+5)$.

a. Démontrer que (Δ)est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ

c. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ sur]0 ; +∞[

5. *a*. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f

   b. Vérifier que pour tout x de]0 ; +∞[: $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

   c. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur]0 ; +∞[.

6. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

7. Tracer $\mathcal{C}$, $(\mathcal{T})$ et les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

8. Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $[1/2\ ;1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.