ça soutra !

Exercice 1

1. $z_2 = iz_1 = i\left(-1+\sqrt{3}i\right) = -i-\sqrt{3} = -\sqrt{3}-i$

2.*a)*Calcul du module et d'un argument de z_1, z_2. On sait que si $z = a+bi$ alors $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ .Donc

$|z_1| = \left|-1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$,comme $z_2 = iz_1$, donc $|z_2| = |iz_1| = |i||z_1| = 1\times 2 = 2$

de plus, l'argument θ d'un nombre complexe $z = a+bi$ est défini par $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

Donc, si on note θ_1, et θ_2 les arguments des complexes z_1 et z_2 alors on a :

L'argument θ_1 est défini par $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta_1 = \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ et $z_1 = \left[2;\dfrac{2\pi}{3}\right]$

L'argument θ_2 est défini par $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta_2 = \dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$ et $z_2 = \left[2;-\dfrac{\pi}{6}\right]$

3.a $\bar{z}_1 = \left(-1-\sqrt{3}i\right)$, donc $2\bar{z}_1 = 2\left(-1-\sqrt{3}i\right) = -2-2\sqrt{3}i = z_A$ et $-z_A = -\left(-2-2\sqrt{3}i\right) = 2+2\sqrt{3}i = z_B$

c. $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = 2+2i\sqrt{3}-\left(-2-2i\sqrt{3}\right) = 4+4i\sqrt{3}$ Donc on a : $\vec{AB}\left(4;4\sqrt{3}\right)$

$z_{\vec{BC}} = z_C - z_B = 8-\left(2+2i\sqrt{3}\right) = 6-2i\sqrt{3}$ Donc on a : $\vec{BC}\left(6;-2\sqrt{3}\right)$

$z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = 8-\left(-2-2i\sqrt{3}\right) = 10+2i\sqrt{3}$. Donc on a : $\vec{AC}\left(10;2\sqrt{3}\right)$

Deux méthodes envisageables :

1. produit scalaire : $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = x_{\vec{AB}}x_{\vec{BC}} + y_{\vec{AB}}y_{\vec{BC}} = 4\times 6+(4\sqrt{3}\times -2\sqrt{3}) = 24-24 = 0$ ce qui montre Que le triangle ABC est rectangle en B .

2. Réciproque du triangle Pythagore : $AB = \sqrt{4^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8cm$;

$BC = \sqrt{6^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}cm$. $AC = \sqrt{10^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{100+12} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}cm$.

On constate que $AB^2+BC^2 = 64+48 = 112$ et $AC^2 = 112$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore Le triangle ABC est rectangle en B.

3. le quadrilatère ABCD soit un rectangle , donc en particulier ABCD est un parallélogramme

Donc $\vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow z_{\vec{AD}} = z_{\vec{BC}} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$: $z_C - z_B = 6-2i\sqrt{3}$ et

$z_D - z_A = z_D - (-2-2i\sqrt{3}) = z_D + 2+2i\sqrt{3})$, donc $z_D = 4-4i\sqrt{3}$

Solution exercice 2

1. Comme la roue ne peut s'arrêter que lorsque le repère est face à secteur vert, blanc , rouge, ou jaune le gain du joueur est soit 100, soit 60, soit 0 soit -20 (X prend donc les valeurs -20, 0 , + 60 et 100).

$p(X=-20)$ est la probabilité pour qu'un secteur rouge s'arrête devant le repère.
Il y a quatorze secteurs rouges sur 24 secteurs, et on suppose qu'il y a équiprobabilité des événements élémentaires (puisque chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère).

Donc: $p(X=-20)=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$.

De même, il y a six secteurs bleus, et $p(X=0)$ est la probabilité pour qu'un secteur bleu s'arrête devant le repère, d'où $p(X=0)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

il y a trois secteurs verts, et $p(X=60)$ est la probabilité pour qu'un secteur vert s'arrête devant le repère, d'où $p(X=60)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$, Enfin il y a un secteur jaune, et $p(X=100)$ est la probabilité pour qu'un secteur jaune s'arrête devant le repère, d'où $p(X=60)=\frac{1}{24}$, on déduit la loi de probabilité de X

x_i	-20	0	60	100
$p(X=x_i)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

L'espérance mathématique de X est : $E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i\, p(X=x_i)=-20\times\frac{7}{12}+0\times\frac{1}{4}+60\times\frac{1}{8}+100\times\frac{1}{24}$

$E(X)=\frac{-280+180+100}{24}=\frac{0}{24}=0$ .On déduit que le jeu est équitable .

$V(X=\sum_{i=1}^{4} x^2{}_i\, p(X=x_i)=(-20)^2\times\frac{14}{24}+0^2\times\frac{6}{24}+60^2\times\frac{3}{24}+(100)^2\times\frac{1}{24}=\frac{5600+10800+10000}{24}=\frac{26400}{24}=1100$

$\sigma(X)=\sqrt{1100}\approx 33{,}17$

2. a) X_n prend les mêmes valeurs qu'au 1., c'est-à-dire + 100, +60 ; 0 et –20. Le raisonnement est identique à celui du 1, sauf que le nombre total de: secteurs est 6 +3 +1+ n = n + 10. D'où :

$p(X_n=-20)=\frac{n}{n+10}$ puisqu'il y a n secteurs rouges $p(X_n=0)=\frac{6}{n+10}$, car il y a 6 secteurs bleus.

$p(X_n=60)=\frac{3}{n+10}$, car il y a 3 secteurs verts.

$p(X_n=100)=\frac{1}{n+10}$, car il y a un secteur jaune. On peut résumer la loi de probabilité de X_n :

x_i	–20	0	60	100
$p(X=x_i)$	$\frac{n}{n+10}$	$\frac{6}{n+10}$	$\frac{3}{n+10}$	$\frac{1}{n+10}$

L'espérance mathématique de X est : $E(X_n)=\sum_{i=1}^{4} x_i\, p(X=x_i)$.

$E(X_n)=-20\times\frac{n}{n+10}+0\times\frac{6}{n+10}+60\times\frac{3}{n+10}+100\times\frac{1}{n+10}$. $E(X_n)=\frac{-20n+180+100}{n+10}=\frac{-20n+280}{n+10}$

b. L'organisateur de la loterie réalise15 % de bénéfices sur chaque mise c'est-à-dire $\frac{15}{100}\times 20=3$;

donc le joueur perd en moyenne 3 € pour chaque mise d'où E (X) ≤ -3

c. $E(X_n)\le -3 \Leftrightarrow \frac{-20n+280}{n+10}\le -3 \Leftrightarrow -20n+280\le -3(n+10)$, puisque n+10 > 0 ;

$-20n+280 \leq -3n-30 \Leftrightarrow -17n \leq -310 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{310}{17} \approx 18,33$, soit $n \geq \dfrac{310}{17} \approx 18,23$. Donc, le nombre minimum de cases rouges que l'organisateur doit prévoir pour ne pas être déficitaire est $n_0 = 19$.

<u>Problème</u>

A- $g(x) = x^2 + 6 - 4\ln x$; $g'(x) = 2x - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x^2-4}{x}$; $g'(x) = \dfrac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$. Comme $x \in]0;+\infty[$ $\dfrac{2(x+\sqrt{2})}{x} > 0$

Donc le signe de g'(x) dépend du signe de $x - \sqrt{2}$, d'où le tableau de variation
La fonction g admet un minimum égal à
g($\sqrt{2}$) = 2+6-4ln $\sqrt{2}$ =8–2ln2.
Par conséquent g(x)> 0 sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$g(\sqrt{2})$	$\nearrow$	

B- a) $f(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{\ln x}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x}{4}) = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\ln x}{x}) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b- $\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{x}{4}) = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0^+}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} -\dfrac{1}{2x} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} \times \lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x) = -\infty \cdot \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.
On déduit que la droite d'équation : x = 0 est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

c- $f'(x) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2}$; $f'(x) = \dfrac{x^2+2+4-4\ln x}{4x^2}$; $f'(x) = \dfrac{x^2+6-4\ln x}{4x^2}$ et $f'(x) = \dfrac{g(x)}{4x^2}$.

d-Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ dépend du signe e- de g(x) ; or g(x) =8-2ln2 > 0 pour tout $x \in]0;+\infty[$.
Il s'ensuit que $f'(x)$ > 0 pour tout $x \in]0;+\infty[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	7/4	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$

2-a) Soit $h(x) = f(x) - y$; $h(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{x}{4}$.

$h(x) = -\dfrac{1}{2x} + \dfrac{\ln x}{x}$ .Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\ln x}{x}) = 0$ .Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.
On déduit que la droite D est une asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b- Trouver les coordonnées du point d'intersection des courbes D et C revient à résoudre l'équation $f(x)$ = y c'est-à-dire $f(x)$ - y = 0 ou encore $h(x)$ = 0. donc $\dfrac{-1+2\ln x}{2x} = 0$. $x \neq 0$ *et* $2\ln x - 1 = 0$.

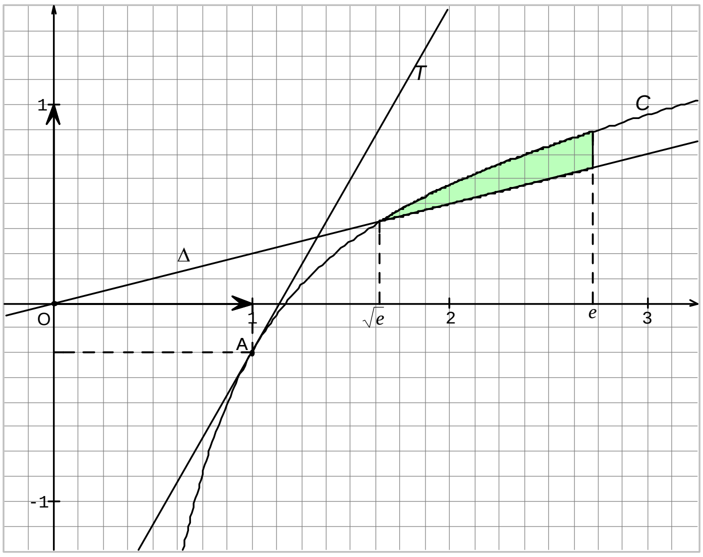
$\ln x = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $\ln x = (1/2)\ln e = \ln e^{1/2}$ et $x = e^{1/2} = \sqrt{e}$. $y = f(e) = \dfrac{\sqrt{e}}{4}$. $A(\sqrt{e}\,;\dfrac{\sqrt{e}}{4})$.

c- Déterminer les positions relative de la courbe C par rapport à la droite D , revient à étudier le signe de

$h(x) = f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $\frac{2\ln x - 1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc il faut étudier de $2\ln x - 1$.

$2\ln x - 1 > 0$; $\ln x > 1/2$, $\ln x > 1/2 = \ln e^{1/2}$,
donc $x > e^{1/2}$. On déduit donc que sur l'intervalle $\left]e^{1/2};+\infty\right[$ la courbe C est au dessus de la droite D .

On démontre de même que sur l'intervalle $\left]0\,;e^{1/2}\right[$ la courbe C est en dessous de la droite D .



4- $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x)u(x)$ avec u= $\ln x$.

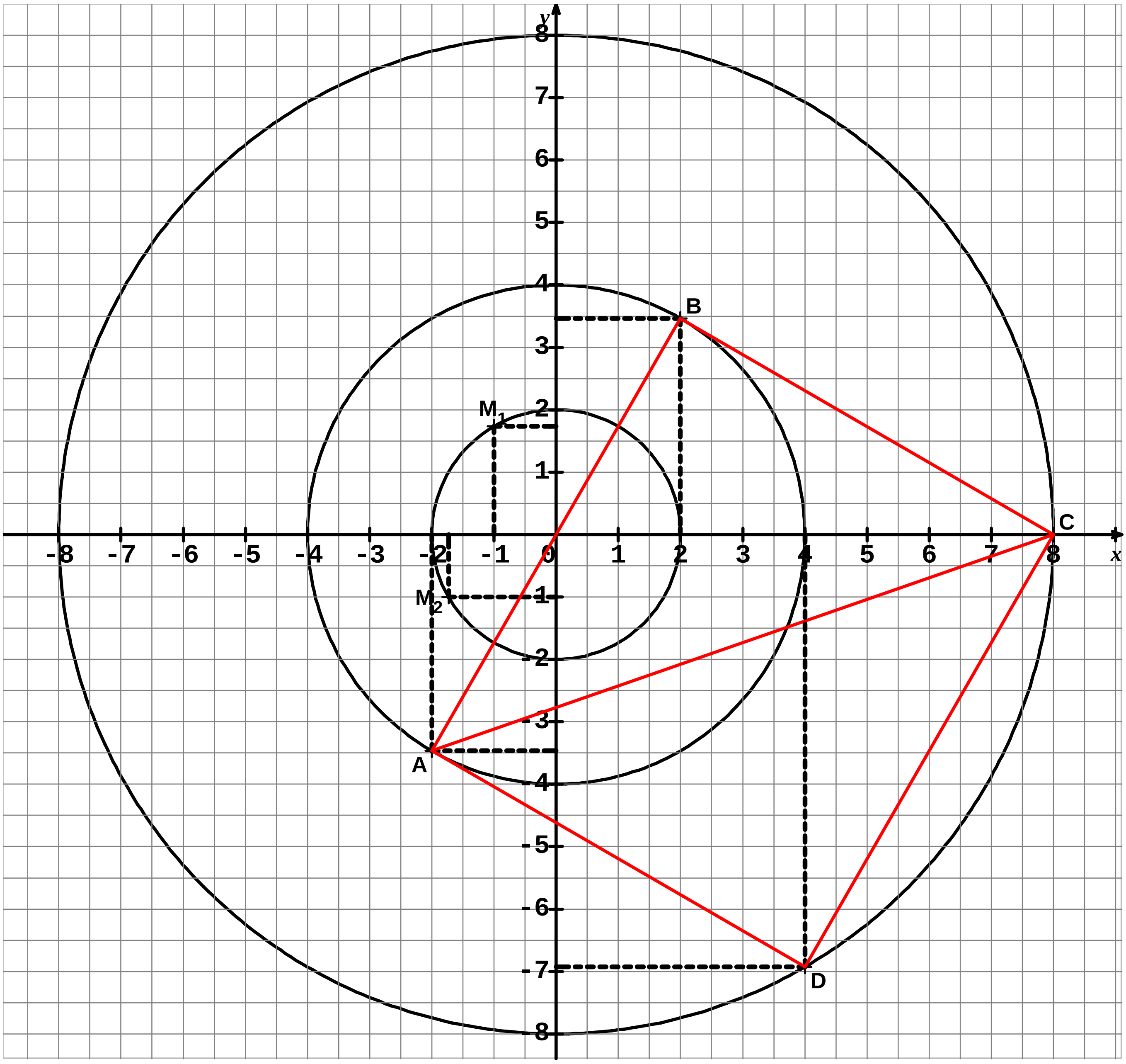
Donc une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $\frac{1}{2}u(x)^2$

Donc $H(x) = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ sur $]0;+\infty[$.

3- $A = 16 \times \left[H(e^2) - H(\sqrt{e})\right]$.

$H(e^2) = -\frac{1}{2}\ln e^2 + \frac{1}{2}(\ln e^2)^2 = -\frac{2}{2} + \frac{4}{2} = 1$ et

$H(\sqrt{e}) = \frac{-1}{2}\ln\sqrt{e} + \frac{1}{2}(\ln\sqrt{e})^2 = \frac{-1}{4}\ln e + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln e\right)^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$. On déduit que $A = 16 \times \left(1 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right) = 16\left(\frac{9}{8}\right) = 18cm^2$.


y
x
A
B
C
D
M_1
M_2
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8