DS n° 5 MATHEMATIQUES TERM D JANVIER 2008-2009

Exercice1 : 5 points

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On note : i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$; z_1 le nombre complexe $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$.

1. On pose $z_2 = i\ z_1$, montrer que $z_2 = -\sqrt{3} - i$

2.a. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.

b. Placer dans le plan P le point M_1 d'affixe z_1 et le point M_2 d'affixe z_2 .

3. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_A ; z_B et z_C telles que :

$z_A = -2 - 2i\sqrt{3}$. $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 8$

3.a. Montrer que $z_A = 2\,\overline{z_1}$ et que $z_B = -z_A$

b. Placer les points A,B et C dans le plan P.

c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

d. Calculer l'affixe du point D de sorte que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

Exercice 2 : 4 points

Une roue de loterie munie d'un index fixe est divisée en secteurs de mêmes dimensions et de différentes couleurs . Le jeu consiste à miser 20 € , à faire tourner la roue et à noter la couleur du secteur désigné* par l'index à l'arrêt de la roue. On admet que chaque secteur a la même probabilité d'apparaître.

La roue comporte :

* n secteurs rouges qui font perdre la mise (gain du joueur: – 20 €)
* 6 bleus où l'on reçoit 20 € (gain du joueur: nul)
* 3 verts où l'on reçoit 80 €
* 1 jaune où l'on reçoit 120 €

Soit X la variable aléatoire qui représente le gain du joueur .

1. Dans cette question, la roue comporte 14 secteurs rouges ($n = 14$).
   a) Déterminer la loi de probabilité de X .
   b) Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.
2. Dans cette question, la roue comporte n secteurs rouges et son propriétaire désire gagner en moyenne au moins 15% des sommes misées.

a. Montrer que l'espérance mathématique de X_n doit être inférieure ou égale à –3.

b. Montrer que l'espérance mathématique de X_n est : $E(X_n) = \frac{-20\,n + 280}{n+10}$

c. Déterminer le nombre minimum n de secteurs rouges que doit comporter la roue.

PROBLEME : 11 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = -4\ln x + x^2 + 6$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1.a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

b. Montrer que $g'(x) = 0$ a une seule valeur $x = \sqrt{2}$ sur I.

c. Etudier le signe de $g'(x)$ sur I,et en déduire le tableau de variation de la fonction g

2. a. Calculer la valeur exacte de $g\left(\sqrt{2}\right)$.

b. Montrer que g est fonction positive sur l'intervalle I

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur] 0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques : 4 cm .

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).

3.soit (Δ) la droite d'équation $y = \frac{x}{4}$. On considère la fonction h définie sur]0 ; +∞[par $h(x) = f(x) - \frac{x}{4}$.

a. Démontrer que (Δ)est asymptote à la courbe C.
b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ
c. Etudier la position relative de C et Δ sur] 0 ; +∞ [

4.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]0; +\infty\right[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f

b. Vérifier que pour tout x de]0 ; +∞[: $f'(x) = \frac{g(x)}{4x^2}$.

c. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur]0 ; +∞[.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.

6. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

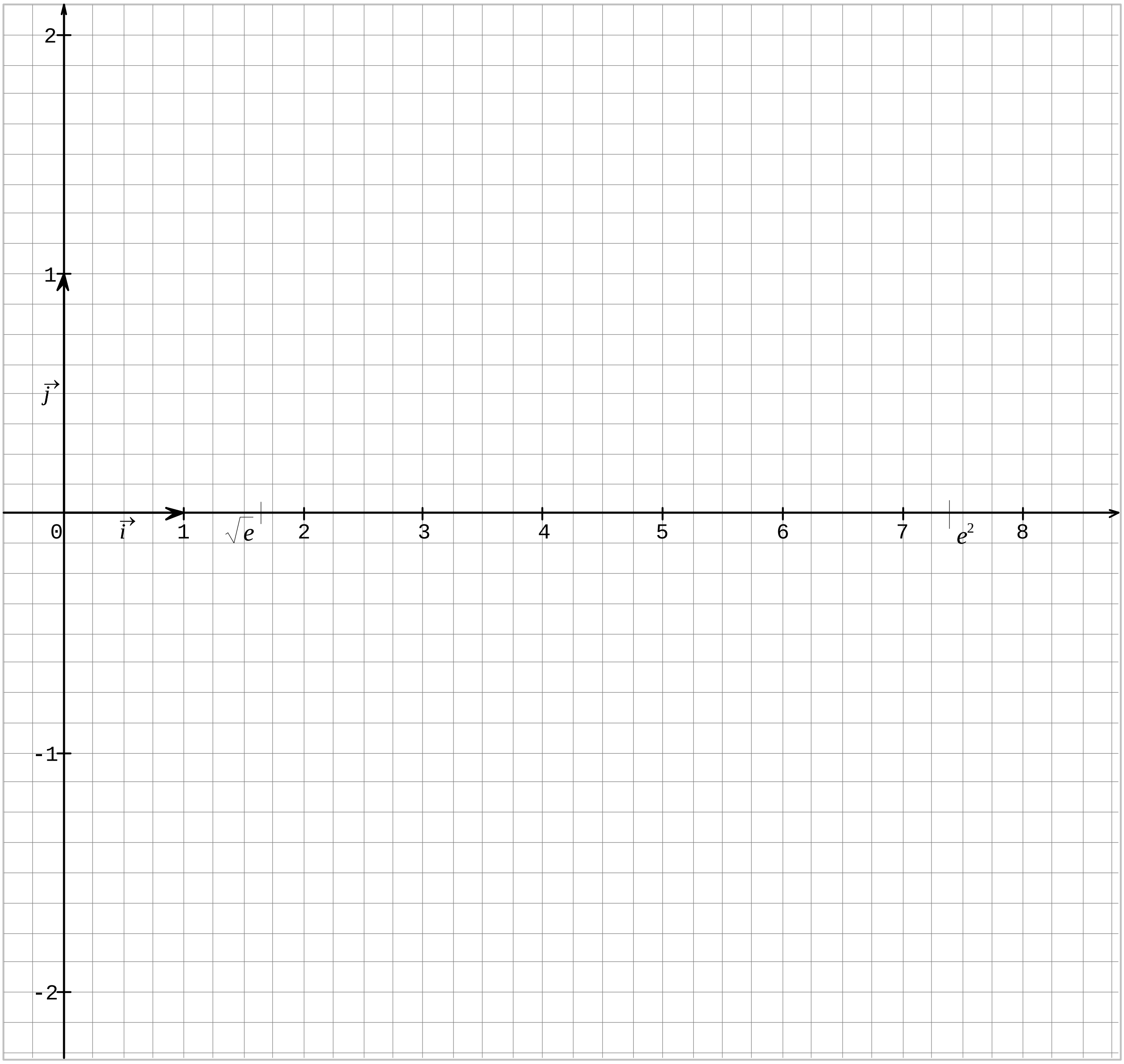
7. Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $[1; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
à l'aide de la calculatrice et en justifiant votre réponse donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C :

Soit k la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par $k(x) = (\ln x)^2$

1. On désigne par k' la fonction dérivée de la fonction k.
Calculer $k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle] 0 ; +∞ [.

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle] 0 ; +∞ [.


2
1
$\vec{j}$
0
$\vec{i}$
1
$\sqrt{e}$
2
3
4
5
6
7
e^2
8
-1
-2