Correction

Exercice 1

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %. On note u_n (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon. On a donc $u_0 = 20$.

1) Quand une valeur diminue de 2 % , elle est multipliée par 0,98 .

$u_1 = u_0 - 0{,}02\, u_0 = 0{,}98\, u_0 = 0{,}98 \times 20 = 19{,}60$ mm

$u_2 = 0{,}98\, u_1 = 0{,}98 \times 19{,}60 = 19{,}21$ mm

$u_3 = 0{,}98\, u_2 = 0{,}98 \times 19{,}21 = 18{,}83$ mm

2) Chaque terme de cette suite est obtenu en multipliant le terme précédent par 0,98, il s'agit donc bien d'une suite géométrique de raison q = 0,98.

3) $u_n = u_0\, q^n = 20 \times (0{,}98)^n$

4) Epaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes :
$u_{10} = u_0\, q10 = 20 \times (0{,}98)^{10} = 16{,}34$ mm

5) On cherche n tel que $u_n \leq 14$ $\quad 20 \times \left(0{,}98\right)^n \leq 14 \Leftrightarrow 0{,}98^n \leq \frac{14}{20} = 0{,}7 \Leftrightarrow n \geq 18$

(En utilisant les touches $y = (0{,}98)^{\wedge}(x)$

donc $n \geq 18$, il faut 18 frappes de marteau pilon pour que l'épaisseur en millimètres de la pièce soit inférieure à 14 mm ce qui donne comme le temps minimal pour que la pièce soit terminée :
$18 \times 6 = 108$ s = 1 minutes et 48 secondes.

Exercice 2

Partie A

1. $u_0 = 15000$. $u_1 = u_0 + 15000 = 245000$ €. Le chiffre d'affaires u_1 en 1991 était de 245 000 €

2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n.

u_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n + 1, on a : $u_{n+1} = u_n + 15000$.

Donc la suite $\left(u_n\right)$ est une suite arithmétique de raison a = 15000 et de premier terme $u_0 = 230\,000$

3. 2006 correspond au 16$^{\text{ème}}$ rang donc

$u_{16} = u_0 + 16a = 230000 + 16 \times 15000 = 230000 + 240000 = 470000$€ .

le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A est donc de 470 000 €

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires dune entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. $v_0 = 150000$. $v_1 = v_0 \times 1{,}074 = 161100$. Le chiffre d'affaires v_1 en 1991 était de 161100 €

2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n. v_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n + 1, on a : $v_{n+1} = v_n \times 1{,}074$. Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison b =1,074 et de premier terme $v_0 = 150\,000$

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B. $v_{16} = v_0 \times \left(q\right)^{16} = 150000 \times \left(1{,}074\right)^{16} = 470067$ €

Partie C

1. On constate que les chiffres d'affaire des deux entreprises A et B en 2006 sont sensiblement les même malgré le chiffre d'affaire plus conséquent de l'entreprise A en 1990.

2. $u_{31} = u_0 + 31a = 230000 + 31 \times 15000 = 695000€$, donc $2 \times u_{31} = 1390000€$

$v_{31} = v_0 \times (q)^{31} = 150000 \times (1,074)^{31} = 1371589$, on est pas loin du double en effet.

Exercice 3

En octobre 1998, Roberto payait sa facture annuelle de chauffage d'un montant de 800€.

1. L'augmentation de 2.5% par an se traduit par une multiplication par $1,0251$ d'une année sur l'autre.

En octobre 2008, la facture sera de $800 \times (1,025)^{10} = 1024€$ soit 1024€ arrondi à l'unité.

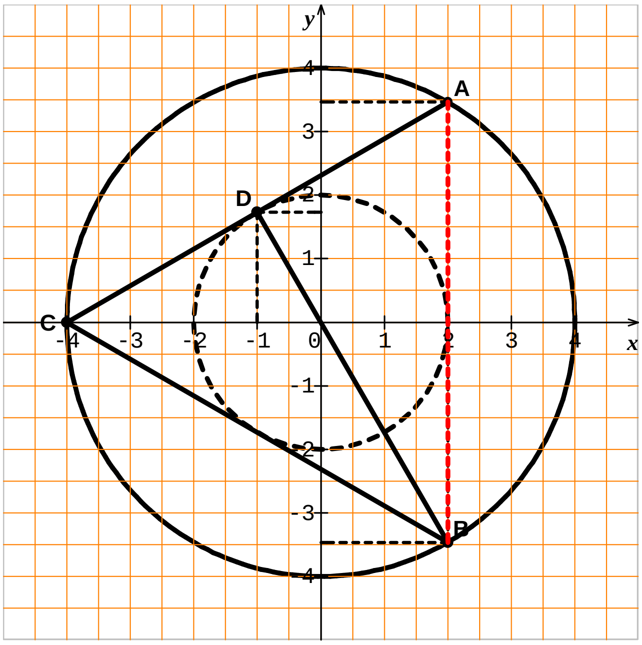
2. Le montant des factures F_n à l'année $1998 + n$ est une suite géométrique de raison $1,025$ et de premier terme $F_0 = 800$. La somme totale des factures est donnée par :

$$F_0 + F_1 + F_2 + ...F_{10} = F_0 \times \frac{q^{11} - 1}{q - 1} = 800 \times \frac{(1,025)^{11} - 1}{1,025 - 1} = 9987€ \quad \text{(arrondi à l'euro).}$$

3. Le montant M_n des factures de Simone à l'année $1998 + n$ est une suite géométrique de raison $1,025$ et de premier terme M_0 à déterminer. La somme totale des factures est donnée par :

$$14200 = M_0 \times \frac{(1,025)^{11} - 1}{1,025 - 1} \Leftrightarrow M_0 = \frac{14200 \times 0,025}{(1,025)^{11} - 1} = 1138€$$

(arrondi à l'euro).



Exercice 4

1. $z_A = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

$z_B = 2 - 2\sqrt{3}\,i$. Soit $\theta_B = \arg z_B$ défini par

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{a}{|z_1|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{b}{|z_1|} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

, et ceci nous permet d'écrire $\theta_B = \arg z_B = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

donc $\theta_B = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ est un argument de z_B.

2. $z_C = -4$ et $z_D = -1 + \sqrt{3}\,i$

$z_C = -4$. Soit $\theta_C = \arg z_C$ défini par $\begin{cases} \cos\theta_C = \dfrac{a}{|z_1|} = \dfrac{-4}{4} = -1 \quad ; \quad \sin\theta_C = \dfrac{b}{|z_1|} = \dfrac{0}{4} = 0 \end{cases}$, et ceci nous permet d'écrire $\theta_C = \arg z_C = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

$z_D = -1 + \sqrt{3}\,i$. Soit $\theta_D = \arg z_D$ défini par $\begin{cases} \cos\theta_D = \dfrac{a}{|z_1|} = \dfrac{-1}{2} \quad ; \quad \sin\theta_D = \dfrac{b}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, et ceci nous permet

d'écrire $\theta_D = \arg z_D = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. donc $\theta_D = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ est un argument de z_B.

3. $|z_A| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$ **;** $|z_B| = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$; $|z_C| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

Comme $OA = OB = OC = 4$, on conclut que les points A,B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

4. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 - 2\sqrt{3}i - 2 - 2\sqrt{3}i = -4\sqrt{3}i$ donc $\overrightarrow{AB}\left(0;-4\sqrt{3}\right)$ et $AB = \sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

$z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A = -1 + \sqrt{3}i - 2 - 2\sqrt{3}i = -3 - \sqrt{3}i$ donc $\overrightarrow{AD}\left(-3;-\sqrt{3}\right)$ et $AD = \sqrt{(-3)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$z_{\overrightarrow{BD}} = z_D - z_B = -1 + \sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i = -3 + 3\sqrt{3}i$ donc $\overrightarrow{BD}\left(-3;3\sqrt{3}\right)$ et $BD = \sqrt{(-3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$.

On constate que $AB^2 = AD^2 + BD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore BDA est rectangle en D

5. $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -4 - 2 - 2\sqrt{3}i = -6 - 2\sqrt{3}i$ donc $\overrightarrow{AC}\left(-6;-2\sqrt{3}\right)$ et $AC = \sqrt{(-6)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = -4 - 2 + 2\sqrt{3}i = -6 + 2\sqrt{3}i$ donc $\overrightarrow{AC}\left(-6;2\sqrt{3}\right)$ et $AC = \sqrt{(-6)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Comme $AB = BC = CA = 4\sqrt{3}cm$, le triangle ABC est triangle équilatéral.