<u>DS n° 6 MATHEMATIQUES TERM D 2008-*2009*</u>

<u>Exercice 1-5 points</u>

La tension u aux bornes d'un circuit électrique vérifie l'équation différentielle (E) : $u''+3600\pi^2 u=0$ dans laquelle u'' désigne la dérivée seconde de la tension par rapport au temps t.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que : $f\left(\frac{1}{180}\right)=0$ et $f'(0)=-\frac{\pi}{2}$.

3. a) Vérifier que, pour tout réel t, on a : $f(t)=\frac{1}{60}\cos\left(60\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$

b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $\left[0\,;\frac{1}{90}\right]$.

<u>Exercice 2 –</u>

Dans cet exercice, l'unité de temps est l'heure et l'unité de température est le degré Celsius.
A l'instant $t = 0$, une tarte sort d'un four, à la température de 220°. Elle est alors placée dans une salle à 20°. On désigne par $f(t)$ la température de la tarte à l'instant t. On définit ainsi une fonction f dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
On suppose que la vitesse $f'(t)$ de refroidissement de la tarte est proportionnelle à la différence entre la température de la tarte et celle de la salle, c'est-à-dire $f(t)-20$
On admet donc qu'il existe un nombre réel λ tel que, pour tout nombre réel positif t, $f'(t)=a\left[f(t)-20\right]$

1. On pose : $y(t) = f(t)-20$

a . Montrer que la fonction y ainsi définie est solution de l'équation différentielle $y'(t)=a\,y(t)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$

b. Résoudre cette équation différentielle sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c. En déduire que, pour tout nombre réel positif t, $f(t)=Ce^{at}+20$, où C est un nombre réel.

d. En utilisant la valeur de $f(0)$, déterminer C.

2. a. Au bout d'un quart d'heure (c'est-à-dire pour $t=\frac{1}{4}$), la température de la tarte est égale à 60°.

Montrer que, pour tout nombre réel positif t, $f(t)=200e^{(-4\ln 5)t}+20$

b. Déterminer la température de la tarte au bout d'une demi-heure.

<u>Problème 11 points</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
On appelle C la courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$, où a, b et c désignent trois nombres réels tels que :

• le point A de coordonnées $(0\,;-1)$ appartient à la courbe C ;

• la courbe $\mathcal{C}$ admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
• $f(1) = 2e$.

Partie A

1. Démontrer que $c = -1$.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
 a. En remplaçant *c* par sa valeur, donner pour tout réel *x*, l'expression de $f'(x)$ en fonction de *a* et de *b*.

 b. Calculer *a* et *b*.

Partie B

On admet que pour tout réel *x*, $f(x) = \left(2x^2 + x - 1\right)e^x$.

1. a. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

 b. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$ (on rappelle que, pour tout entier naturel $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$).
 Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Vérifier que, pour tout réel *x*, $f'(x) = x(2x+5)e^x$.

 b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel *x*.
 c. Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
 Compléter le tableau de valeur suivant , arrondir à 10^{-2} près.

x	-5	-4	-3	$-2,5$	-2	-1	0	$0,5$	$0,75$	1
$f(x)$										

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

<u>Partie C</u>

On considère les fonctions F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (2x^2 - 3x + 2)e^x$.

1. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

2. On appelle D la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses , les droites d'équations :
 $x = -1$ et $x = 1/2$.
a. Hachurer D sur le graphique.

b. Calculer la valeur exacte de la mesure, en cm^2, de l'aire A de D puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.