Corrigé

Exercice 1 6 points

Partie A

1. $z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = \left(8\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 64 = 192 - 256 = -64 = (8i)^2$

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8\sqrt{3}-8i}{2} = 4\sqrt{3}-4i \text{ et } z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8\sqrt{3}+8i}{2} = 4\sqrt{3}+4i\,.$$

Les racines sont donc : $4\sqrt{3}+4i$ et $4\sqrt{3}-4i$.

2. on a : $\left|z_0^3\right| = \left|z_0\right|^3 = 2^3 = 8$. De même $\arg z_0^3 = 3\arg z_0 = 3\times\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, on obtient donc $z_0 = 8e^{i\pi/2} = 8i$

Partie B

1.Soit $z_B = 4\sqrt{3}+4i$. On a : $|z_B| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{45+16} = \sqrt{64} = 8$ donc $|z_B| = 8$

Soit $\theta_B = \arg z_B$ avec $\begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$,

donc on obtient : $z_B = 4\sqrt{3}+4i = r\left(\cos\theta_B + i\sin\theta_B\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 8e^{i\pi/6}$

Comme $z_C = \overline{z_B}$,alors $z_C = 8e^{-i\pi/6}$ .Un des arguments de z_C est $z_C = -\pi/6 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Comme i le nombre complexe est : de module 1 et d'argument $\pi/2$.

On en déduit l'écriture exponentielle : $z_A = 8i = 8e^{i\pi/2}$.

3. a. L'écriture complexe de la rotation est : $z' - z_O = (z - z_O)e^{i\pi/3}$, donc

$$z_D = z_A e^{i\pi/3} = 8e^{i\pi/2}\times e^{i\pi/3} = 8e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8e^{5\pi i/6} = 4\left(\cos\left(5\pi/6\right) + j\sin\left(5\pi/6\right)\right) = -4\sqrt{3}+4i$$

4.a On place B sur le cercle de centre O et de rayon 8 et la droite d'équation $y = 4$.

b. Par définition de la rotation OA = OD, donc OAD est isocèle en O.

De plus $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{3}$ angle de rotation

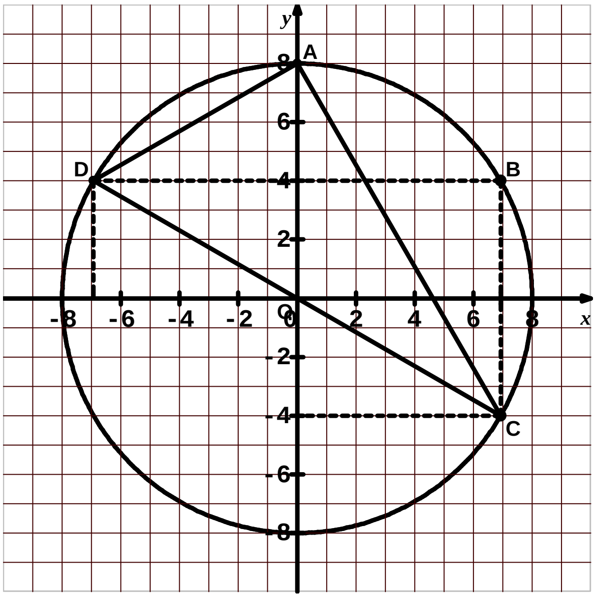
$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right) = \arg\left(z_D - z_A\right) = \left(\overrightarrow{OA};\vec{u}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{OD}\right) = -\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{OD}\right) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

. Il en résulte que les angles à la base ont également une mesure égale à $\frac{\pi}{3}$. Il est donc équilatéral.

c. On a $z_M = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{4\sqrt{3}-4i-4\sqrt{3}+4i}{2} = 0$. Donc $M \equiv O$ et O est le milieu de [CD].

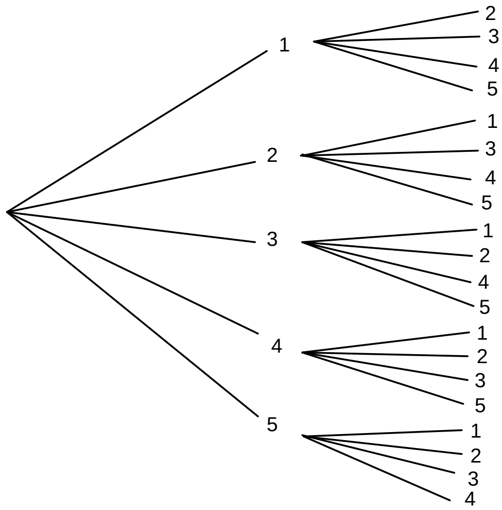
d. D'après la question précédente [CD] est un diamètre du cercle de centre O et de rayon 8 ;

A étant un point de cercle ($|z_A| = |8i| = 8|i| = 8$). le triangle ACD est donc rectangle en A.



Exercice 2 : 4 points

1. a. voir l'arbre ci-contre



b. Il y a 8 tirages donnant un nombre pair et 8 tirages donnant un multiple de 3, donc

$$p(M_2) = p(M_3) = \frac{8}{20} = \frac{4}{5}.$$

c. Les tirages multiples de 3 sont :
12 ; 15 ; 21 ; 24 ; 42 ; 45 ; 51 ; 54.
il faut supprimer les pairs : 12 ; 24 ; 42 ; 54 et dans ceux qui restent les multiples de 5, soit 15 et 45.
Il reste donc 21 et 51. On a donc $p(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

2. a. 13 ; 23 ; 31 ; 41 ; 43 ; 53 qui sont premiers donnant un gain de 0−3 = −3.
14 ; 32 ; 34 ; 52 sont seulement pairs ; ils donnent un gain de 2−3 = −1.
2 ; 24 ; 42 ; 54 sont pairs et multiples de 3 ; ils donnent un gain de 2+3−3 = 2.
21 ; 51 sont multiples de 3, mais pas de 2 ni de 5 ; ils donnent un gain de 3−3 = 0.
25 ; 35 sont multiples de 5, mais pas de 2 ni de 3 ; ils donnent un gain de 5−3 = 2.
15 et 45 sont multiples de 3 et de 5 ; ils donnent un gain de 3+5−3 = 5.
Donc $X = \{-3 ; -1 ; 0 ; 2 ; 5\}$

b. Deux tirages (21 et 51) donnent un gain de 0 € ; la probabilité $p(X = 0) = \frac{2}{20}\frac{1}{10} = 0,1$.

c. On a le tableau suivant :

$X = k$	-3	-1	0	2	5
$p(X = k)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$

3. $E(X)=-3\times\frac{6}{20}-1\times\frac{4}{20}+0\times\frac{2}{20}+2\times\frac{6}{20}+5\times\frac{10}{20}=\frac{-18-4+12+10}{20}=\frac{0}{20}=0$.

L'espérance de gain étant nulle, le jeu est équitable.

Exercice 3

1°) Etude de fonction $f(x)=\frac{x^2-4x+7}{x-1}=3\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+7}{x-1}-3=0\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+7-3(x-1)}{x-1}=0$

$\frac{x^2-7x+10}{x-1}=0;\Delta=49-4\times1\times10=9>0$

donc 2 racines réelles : $x_1=\frac{7-3}{2}=2$ *et* $x_2=\frac{7+3}{2}=5$

La droite d'équation $y=3$ coupe la courbe représentative de *f* en deux points d'abscisses 2 et 5.
A(2 ; 3) et B(5 ;3) sont donc les deux points recherchés.

2°) $\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to1^-}x^2-4x+7=1-4+7=4\\&\lim_{x\to1^-}x-1=0^-\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ $\quad\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to1^+}x^2-4x+7=1-2+5=4\\&\lim_{x\to1^+}x-1=0^+\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

pour $x\neq0$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+7}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ *d'où* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4x+7}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=+\infty$ *d'où* $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

3°) $f'(x)=\frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+7)\times1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-7}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$f'(x)$ est du signe de x^2-2x-3 car $(x-1)^2$ sur]1 ;+ ∞ [. Calculons les racines du polynôme x^2-2x-3

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)=4+12=16>0$; donc 2 racines réelles : $x_1=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$ *et* $x_2=\frac{2+4}{2}=3$

Ce polynôme admet deux racines réelles –1 et 3 donc x^2-2x-3 est positif à l'extérieur de ces racines –1 et 3 on en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f*

f admet un minimum en 3 qui est : $f(3)=\frac{3^2-4\times3+7}{3-1}=\frac{9-12+7}{2}=\frac{4}{2}=2$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

4) déterminons les équations réduites des tangentes (T_A) et (T_B) aux points d'abscisses 2 et 5 de la courbe :

coefficient directeur de la tangente au point A : $f'(2)=\frac{2^2-2\times2-3}{(2-1)^2}=\frac{4-4-3}{1}=-3$

Equation de la tangente au point A : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$; $y=-3(x-2)+3=-3x+6+3$.

$\boxed{(T_A) : y=-3x+9}$

coefficient directeur de la tangente au point B : $f'(5)=\frac{5^2-2\times5-3}{(5-1)^2}=\frac{25-10-3}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

Equation de la tangente au point B : $y = f'(5)(x-5) + f(5)$ $y = \frac{3}{4}(x-5)+3$ $y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} + \frac{12}{4}$ $\boxed{(T_B) : y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}}$

5 $x-3+\frac{4}{x-1} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)} + \frac{4}{x-1} = \frac{x^2-x-3x+3+4}{x-1} = \frac{x^2-4x+7}{x-1} = f(x)$ donc $f(x) = x-3+\frac{4}{x-1}$

$f(x)-(x-3) = x-3+\frac{4}{x-1}-(x-3) = \frac{4}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x-1 = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-3)\right] = 0$.donc la droite d'équation $y = x-3$ est asymptote à C_f en $-\infty$ et $+\infty$

6°)Position de la courbe C_f par rapport à l'asymptote (D') :

$x-1 < 0$ si et seulement si $x < 1$;

$x-1 > 0$ si et seulement si $x > 1$

$f(x)-(x-3) = \frac{4}{x-1} < 0$ sur $]-\infty\,;1[$,

C_f est strictement au dessous de la droite (D) d'équation $y = x-3$

et $f(x)-(x-3) = \frac{4}{x-1} > 0$ sur $]1\,;+\infty[$,

C_f est strictement au dessus de la droite (D) d'équation $y = x-3$

7) Construction de la courbe C_f et des droites (D), (T_A), (T_B).