# Correction du bac blanc de mathématiques –30 mars 2010

## EXERCICE 1

### Partie A

**1.** $\left(z+2\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z\sqrt{3}+12\right)=z^3+2\sqrt{3}z^2+12z+2\sqrt{3}z^2+12z+24\sqrt{3}=z^3+\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)z^2+24z+24\sqrt{3}$

$$=z^3+4z^2\sqrt{3}+24z+24\sqrt{3}=P(z)$$

**2.** Résolution de l'équation $z^2+2z\sqrt{3}+12=0$ :

Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times12=12-48=-36$

$\Delta<0$, l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{-2\sqrt{3}-i\sqrt{36}}{2}=-\sqrt{3}-3i$ . De même : $z_2=\overline{z_1}=-\sqrt{3}+3i$.  $S=\left\{-\sqrt{3}-3i;-\sqrt{3}+3i\right\}$

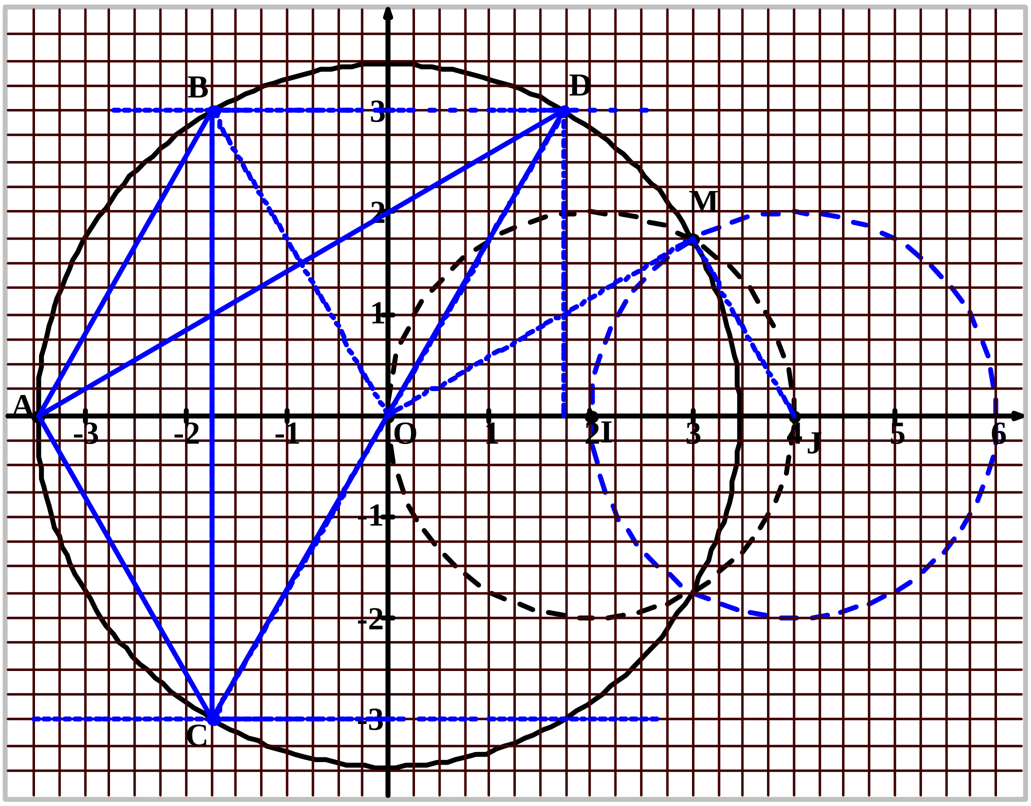
**3.** Résolution de l'équation $P(z)=0$ :

$\left(z+2\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z\sqrt{3}+12\right)=0 \Leftrightarrow z+2\sqrt{3}=0$ *ou* $z^2+2z\sqrt{3}+1=0$ .

Donc : $S=\left\{-2\sqrt{3}\,;-\sqrt{3}+3i\,;-\sqrt{3}-3i\right\}$

### Partie B

1°.




**2. a)** Calcul des modules $|z_A|=\left|-2\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$ ; $|z_B|=\left|-\sqrt{3}+3i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ et

$|z_C| = |\overline{z_B}| = |z_B| = 2\sqrt{3}$

Calcul des arguments : On note respectivement $\theta_A$, $\theta_B$ et $\theta_C$ un des arguments de $z_A$, $z_B$ et $z_C$.

$z_A = -2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\pi}$ donc $\theta_A = \arg z_A = \pi + 2k\pi$ ;

$z_B = -\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{2i\pi/3}$, donc $\arg z_B = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ .

comme $z_C = \overline{z_B}$, on a donc $\theta_C = \arg z_C = -\arg z_B = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ .

**b)** La forme exponentielle d'un nombre complexe z de module $\rho$ et d'argument $\theta$ est : $z = \rho\, e^{i\theta}$, donc :

$z_A = 2\sqrt{3}\, e^{i\pi}$ ; $z_B = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{2\pi}{3}i}$ et $z_C = \overline{z}_B = 2\sqrt{3}\, e^{-\frac{2\pi}{3}i} = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

**3. a)** Soit M un point du plan et M' son image par la rotation $R$ de centre O et d'angle $-\pi/3$.

On note z et z' les affixes respectives des points M et M '. On a : $z' = z\,e^{-i\pi/3}$

**b)** Soit A' l'image de A par la rotation $R$ :

$z_A' = z_A\, e^{-i\frac{\pi}{3}} = -2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}} = -2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3} + 3i = z_B$

Donc B est l'image de A par la rotation R.

**c)** Soit D l'image de B par $R$ :

$z_D = z_B\, e^{-i\frac{\pi}{3}} = \left(-\sqrt{3} + 3i\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\sqrt{3} + 3i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$z_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}^2}{2}i + \frac{3}{2}i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i^2 = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{2}i = \sqrt{3} + 3i$

**4. a)** Soit I le milieu de [CD] : $z_I = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{-\sqrt{3} - 3i - \sqrt{3} - 3i}{2} = 0$

Donc O est le milieu du segment [CD] et donc le centre du cercle de rayon $OC = |z_C| = 2\sqrt{3}$.

**b)** En utilisant les résultats de la question **2.**a), on a :

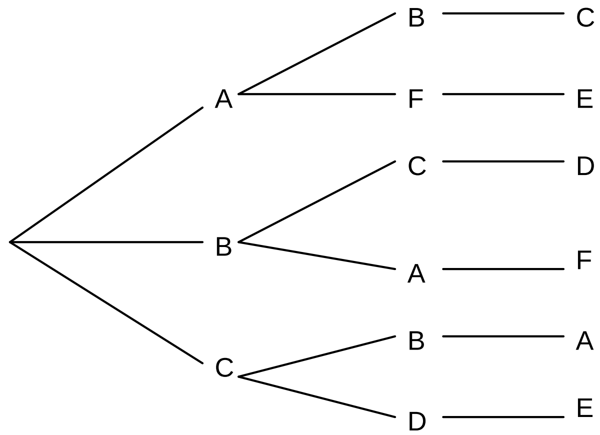
$OA = |z_A| = 2\sqrt{3}$ ; $OB = |z_B| = 2\sqrt{3}$ ;

Donc A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{3}$.

**c)** On a montré que les points A et B appartiennent au cercle de diamètre [CD], donc d'après la propriété du triangle rectangle et du cercle circonscrit, les triangles CAD et CBD sont rectangles en A et B.

**EXERCICE 2**

**1.** Les six trajets possibles sont : *ABC* ; *AFE* ; *BCD* ; *BAF* ; *CAB* ; *CDE*




**2. a)** Il y a deux trajets qui finissent en E , donc

$p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

**b)** Il y a 4 chemins finissant par le sas 2 , donc

on a : $p_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

**3. a)** X peut prendre les valeurs : 56 ; 58 ; 66 ; 68 ; 74 .

**b)**

| $x_i$ | 56 | 58 | 66 | 68 | 74 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ |

**c)** $E(X) = 56\times\frac{1}{6} + 58\times\frac{1}{6} + 66\times\frac{1}{6} + 68\times\frac{1}{6} + 74\times\frac{1}{6} = 66\,\text{min}$ .

cette espérance représente le temps moyen que mettra le robot pour nettoyer trois salles.

**d)** on a temps inférieur à 60 minutes dans deux cas sur 6 , soit $p_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

**4. a)** $V(x) = \sigma^2(X) = \frac{(66-56)^2 + (66-58)^2 + (66-66)^2 + (68-66)^2 + 2(74-66)^2}{6} = \frac{100+64+0+4+128}{6} = \frac{296}{6} = \frac{148}{3}$

$V(x) = \sigma^2(X) = \frac{56^2 + 58^2 + 66^2 + 68^2 + 2\times 74^2}{6} - 66^2 = \frac{26432}{6} - 4356 = \frac{26432 - 26136}{6} = \frac{296}{6} = \frac{148}{3}$

Donc $\sigma(X) \approx 7{,}02$ .

**b)** En faisant travailler le robot 365 jours on a

$n\times E(X) + 1{,}5\times\sigma(X)\times\sqrt{n} = 365\times 66 + 1{,}5\times 7{,}02\times\sqrt{365} = 24291{,}28\,\text{min}$ . Soit environ 404,85 heures

## PROBLÈME

### Partie A

**1.** $f(x) = \frac{1}{2}(2-x)e^x = e^x - \frac{1}{2}x\,e^x$

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}xe^x = 0$, par conséquent, par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ .On peut donc en déduire que la courbe C admet la droite d'équation y = 0 comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ .

**2.** $f(x) = \frac{1}{2}(2-x)\times e^x$ . On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(2-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$

**3. a)** f est de la forme $\frac{1}{2}uv$ avec $u(x) = 2-x$ et $v(x) = e^x$ ; $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left[-1\times e^x + (2-x)e^x\right] = \frac{1}{2}\left[(-1+2-x)e^x\right] = \frac{1}{2}(1-x)e^x.$

**b)** Pour tout x réel $e^x > 0$ donc f'(x) est du signe de (1 –x) : $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ .

Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty;1[$ , $f'(x) < 0$ sur $]1;+\infty[$ et $f'(1) = 0$

**c)** $f(1) = \frac{1}{2}(2-1)\,e^1 = \frac{e}{2} \approx 1{,}4$

**d)**

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | $\nearrow$ | $f(1)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**Partie B**

**1.** Équation de la tangente : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ ; $f(2) = \frac{1}{2}(2-2)e^2 = 0$ ; $f'(2) = \frac{1}{2}(1-2)e^2 = -\frac{1}{2}e^2$

$y = -\frac{1}{2}e^2(x-2)$ soit $y = \frac{e^2}{2}(-x+2)$.

**2. a)** $g(x) = \frac{e^2}{2}(-x+2) - f(x) = \frac{e^2}{2}(-x+2) - \frac{1}{2}(2-x)e^x = -\frac{e^2}{2}x + e^2 - e^x + \frac{1}{2}xe^x$.

On développe $\frac{1}{2}(-x+2)\left(e^2 - e^x\right) = -\frac{e^2}{2}x + \frac{1}{2}xe^x + e^2 - e^x$.On trouve les mêmes expressions développées donc l'égalité est vérifiée .

**b)** Étude du signe de $\frac{1}{2}(-x+2)\left(e^2 - e^x\right)$

$-x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

$e^2 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^2 \geq e^x \Leftrightarrow \ln e^2 \geq \ln e^x \Leftrightarrow 2 \geq x.$

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x+2$ | | + | 0 | $-$ | |
| $e^2 - e^x$ | | + | 0 | $-$ | |
| $g(x)$ | | + | 0 | + | |

**c)** D'après le tableau ci-dessus $g(x) \geq 0$ donc $\frac{e^2}{2}(-x+2) \geq f(x)$ pour tout x .

Donc pour tout réel x la courbe $C$ est au-dessous de la tangente T.

**3.** Tracé ci-après

**Partie C**

**1.** $G(x) = \frac{1}{2}(x-3)e^x + \frac{e^2}{2}\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)$.

$G'(x) = \frac{1}{2}\left[1 \times e^x + (x-3) \times e^x\right] + \frac{e^2}{2}\left(2 - \frac{2x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[(1+x-3)e^x\right] + \frac{e^2}{2}(2-x) = \frac{1}{2}(x-2)e^x + \frac{e^2}{2}(2-x)$

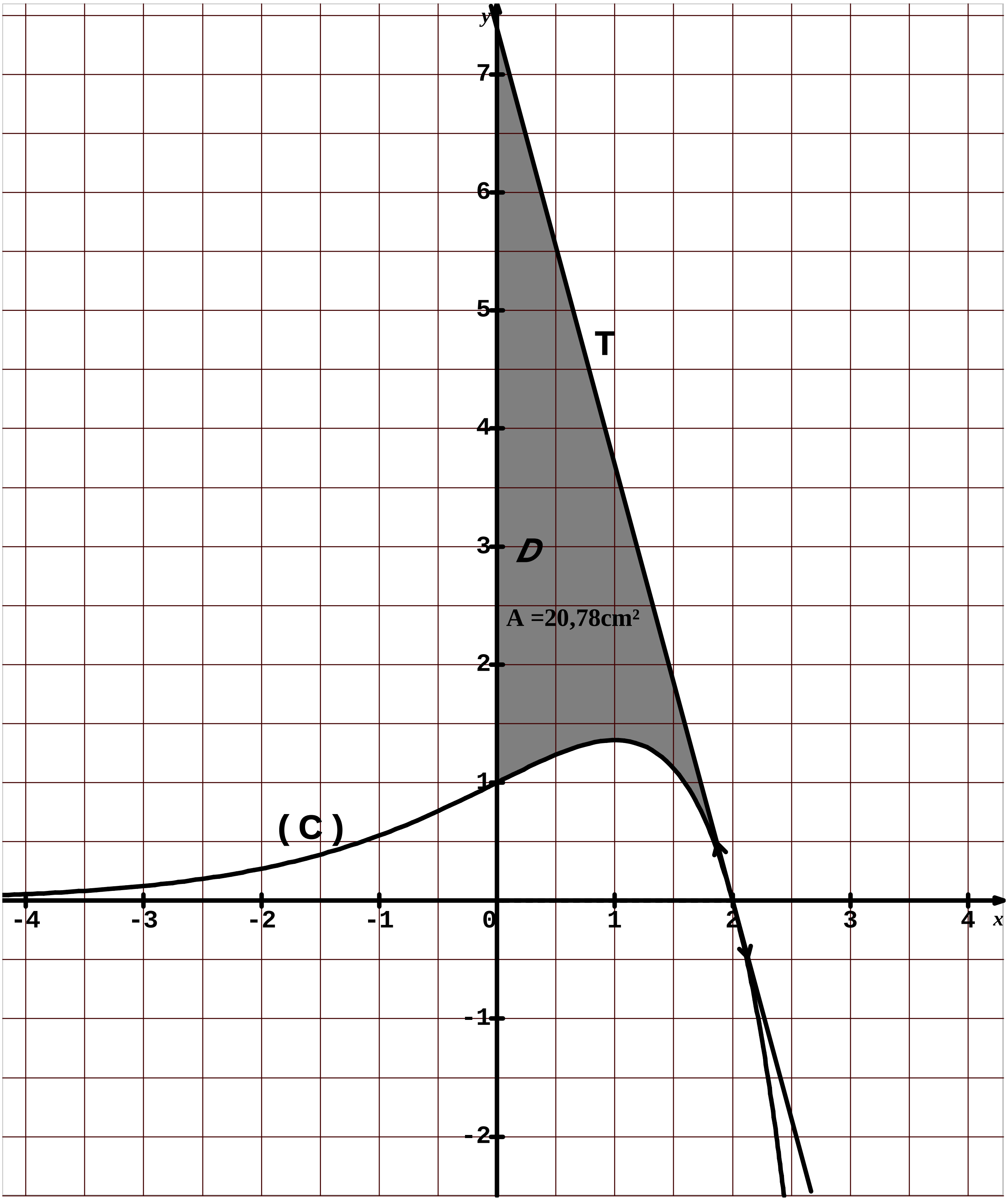
$G'(x) = -f(x) + \frac{e^2}{2}(-x+2) = g(x)$ . On peut conclure que G(x) est une primitive de g.

**2. a)** Voir ci après le domaine D hachuré sur le graphique représentant la droite T et la courbe $C$ .

**b)** $C$ est au-dessous de la tangente T donc $A = \left(\int_0^2 \frac{e^2}{2}(-x+2) - f(x)\, dx\right) u.a = 4\int_0^2 g(x)\, dx = 4\left[G(x)\right]_0^2$

$\left[G(x)\right]_0^2 = G(2) - G(0) = \frac{1}{2}(2-3)e^2 + \frac{1}{2}e^2\left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}(0-3)e^0 + \frac{1}{2}\left(0 - \frac{0}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}e^2 + e^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(e^2 + 3\right)$

Comme $1u.a = 4cm^2$ ,donc on a : $A = \frac{4}{2}\left(e^2+3\right) = \left(2e^2 + 6\right)\text{cm}^2$. soit $A \approx 20{,}78\,\text{cm}^2$.



y
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x
T
D
A =20,78cm²
( C )