MATHEMATIQUES

Baccalauréat blanc –SRIE D
Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Ce sujet nécessite deux feuilles de papier millimétré.
Coefficient : 4 Durée : 4 heures
- Ce sujet comporte 4 pages -

EXERCICE 1 - 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Soit $P(z)=z^3+4z^2\sqrt{3}+24z+24\sqrt{3}$ où z est une variable complexe.

1. Vérifier que $P(z)=\left(z+2\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z\sqrt{3}+12\right)$.

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2+2z\sqrt{3}+12=0$.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

Partie B

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-2\sqrt{3}$, $z_B=-\sqrt{3}+3i$, $z_C=-\sqrt{3}-3i$.

2. a) Déterminer le module et un argument de z_A, z_B et z_C.

b) Donner l'écriture exponentielle de z_A, z_B et z_C.

3. ***R*** est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

a) Donner l'écriture complexe de la rotation ***R*** .

b) Montrer que l'image du point A par ***R*** est le point B.

c) Calculer, sous forme algébrique, l'affixe du point D, image du point B par ***R*** .

4. Soit (***C***) le cercle de diamètre [CD].

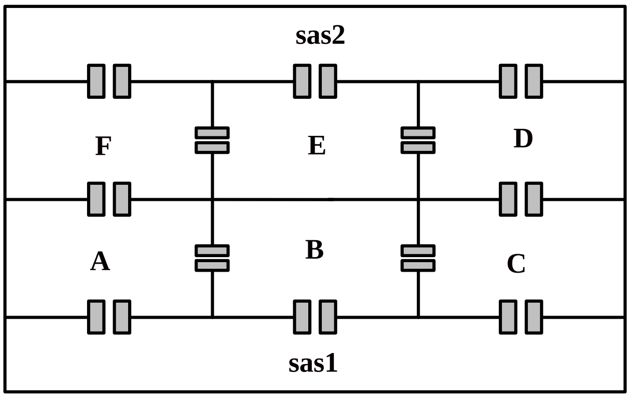
a) Justifier que O est le centre de (***C***).

b) Montrer que les points A et B appartiennent à (***C***).

c) En déduire la nature des triangles CAD et CBD.

EXERCICE 2 - 5 points

Un établissement est composé de deux sas, notés 1 et 2, et de six salles de travail, notées A, B, C, D, E et F. Les communications entre ces différentes salles se font par le moyen de 12 portes représentées par le schéma suivant :



On remarquera que les salles B et E ne communiquent pas directement.

– Un robot, rangé dans le sas 1, est programmé pour nettoyer exactement trois salles différentes parmi les salles A, B, C, D, E et F.
– Le robot commence toujours son parcours par l'une des salles A, B ou C.
– Dès que le robot entre dans une salle, il la nettoie systématiquement.
– Il lui est impossible de franchir la même porte plus d'une fois ou de nettoyer deux fois la même salle.
– Une fois les trois salles nettoyées, le robot ressort :

- Soit par le sas 1,
- Soit par le sas 2. Dans ce cas, il retourne plus tard dans le sas 1 par un couloir non représenté sur le schéma.

On appelle « trajet » une suite ordonnée de 3 salles constituant un parcours possible pour le robot.

Exemples :
– ABC et BCD sont des trajets.
– CBA et ABC sont deux trajets différents.
– ABE n'est pas un trajet (les salles B et E ne communiquent pas directement).
– DEF n'est pas un trajet (le robot ne peut pas commencer par la salle D).

1. Déterminer les six trajets possibles (on pourra s'aider d'un arbre).
Dans toute la suite, on admet que les six trajets obtenus sont équiprobables.

2. a) Calculer la probabilité p_1 de l'évènement « la salle E est la troisième salle nettoyée par le robot ».

b) Calculer la probabilité p_2 de l'évènement « le robot sort par le sas 2 ».

3. Le tableau suivant donne le temps de nettoyage du robot dans chacune des salles en minutes :

Salles	A	B	C	D	E	F
Temps de nettoyage du robot	20 min	24 min	30 min	14 min	22 min	14 min

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le temps de nettoyage des 3 salles exprimé en minutes.

a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

c) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X . Que représente ce nombre ?

d) Calculer la probabilité p_3 de l'évènement « le robot effectue le nettoyage des 3 salles en moins de 60minutes » ?

4. On appelle $\sigma(X)$ l'écart type de la variable aléatoire X.

a) Déterminer la valeur arrondie au centième de $\sigma(X)$.

b) Le robot effectue un parcours par jour, 7 jours sur 7.
Soit n un entier naturel non nul.

On admet qu'il est acceptable d'utiliser le robot durant n jours d'affilée sans révision si le nombre : $n \times E(X) + 1{,}5 \times \sigma(X) \times \sqrt{n}$ est inférieur à 500 heures.

Est-il acceptable de ne faire réviser le robot qu'une fois par an?

PROBLÈME - 10 points

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \frac{1}{2}(2-x)\,e^x$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\,\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

1. En observant que, pour tout nombre réel x, $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x\,e^x$, déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f\,'(x) = \frac{1}{2}(1-x)\,e^x$.

b) Étudier le signe de $f\,'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Calculer la valeur exacte de f (1). En donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

d) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

Montrer que la droite T a pour équation : $y = \frac{e^2}{2}(2-x)$.

2. a) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^2}{2}(2-x) - f(x)$.

Vérifier que, pour tout nombre réel x, $g(x) = \frac{1}{2}(2-x)\left(e^2 - e^x\right)$

b) Étudier le signe de $g(x)$, suivant les valeurs de x.

c) En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T .

3. Tracer la droite T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ puis, sur le même graphique, la partie de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-4;3]$.

Partie C

1. Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}(x-3)\,e^x + \frac{e^2}{2}\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)$.

On note G' la dérivée de la fonction G sur $\mathbb{R}$. Calculer $G'(x)$, puis conclure .

2. On note D le domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite T et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.

a) Hachurer le domaine D sur le graphique représentant la droite T et la courbe $\mathcal{C}$.

b) Calculer la valeur exacte de l'aire A , exprimée en unités d'aire, du domaine D.
En donner la valeur arrondie au centième.