

Exercice 1 : 5 points

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon.

Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2%.

On note (u_n) (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon.

On a donc $u_0 = 20$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats arrondis au centième de millimètre.
2. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison.
3. Déterminer u_n en fonction de l'entier n .
4. Quelle est l'épaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes ?
5. On considère que la pièce est terminée dès que son épaisseur est inférieure à 14 millimètres.
Quel est le temps minimal pour que la pièce soit terminée ?

Exercice 2 : 5 points

Partie A

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise A s'élevait à 230 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 15 000 euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires u_1 en 1991.
2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année $1990 + n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Préciser le premier terme u_0 et la raison a de cette suite.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A.

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 1991.
2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année $1990 + n$.
Justifier que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,074.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B.

 **Fomesoutra.com**
ça soutra !
Docs à portée de main

Partie C

1. Que constate-t-on en 2006 pour les entreprises A et B ?
2. En 2006, le chef de l'entreprise B affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires pratiquement double de celui de l'entreprise A. A-t-il raison ? Justifier.

Exercice 3 ; 4 points

En octobre 1998, Roberto payait sa facture annuelle de chauffage d'un montant de 800€.

1. Sachant que cette facture a augmenté de 2,5 % par an, quelle a été la facture payée par Roberto en octobre 2008 (arrondir à l'euro) ?
2. En supposant que cette évolution se poursuit, déterminer la somme totale payée par Roberto entre octobre 1998 et octobre 2008 (arrondir à l'euro).
3. Simone a elle perdu sa facture d'octobre 98 mais elle sait que la somme de ses factures entre octobre 98 et octobre 2008 est de 14200€. Sachant que chacune de ses factures a augmenté de 2,5 % par an, comme son ami d'enfance Roberto, retrouver le montant de sa facture en 1998.

Exercice 5 : 6 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm (ou 1 grand carreau).

1. On considère les deux nombres complexes z_A de module 4 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ et $z_B = 2 - 2\sqrt{3}i$.

(a) Déterminer la forme algébrique du nombre z_A .

(b) Déterminer la forme trigonométrique du nombre z_B .

(c) Placer dans le plan les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B .



2. On considère les deux nombres complexes $z_C = -4$ et $z_D = -1 + \sqrt{3}i$.

(a) Calculer le module et un argument de chacun de ces deux nombres complexes.

(b) Placer dans le plan complexe les points C et D d'affixes respectives z_C et z_D .

3. Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

4. Démontrer que le triangle BDA est rectangle.

5. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Correction

Exercice 1

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %. On note u_n (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon. On a donc $u_0 = 20$.

1) Quand une valeur diminue de 2 %, elle est multipliée par 0,98 .

$$u_1 = u_0 - 0,02 u_0 = 0,98 u_0 = 0,98 \times 20 = 19,60 \text{ mm}$$

$$u_2 = 0,98 u_1 = 0,98 \times 19,60 = 19,21 \text{ mm}$$

$$u_3 = 0,98 u_2 = 0,98 \times 19,21 = 18,83 \text{ mm}$$

2) Chaque terme de cette suite est obtenu en multipliant le terme précédent par 0,98, il s'agit donc bien d'une suite géométrique de raison $q = 0,98$.

$$3) u_n = u_0 q^n = 20 \times (0,98)^n$$

4) Epaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes :

$$u_{10} = u_0 q^{10} = 20 \times (0,98)^{10} = 16,34 \text{ mm}$$

$$5) \text{ On cherche } n \text{ tel que } u_n \leq 14 \quad 20 \times (0,98)^n \leq 14 \Leftrightarrow 0,98^n \leq \frac{14}{20} = 0,7 \Leftrightarrow n \geq 18$$

(En utilisant les touches $y = (0,98)^x$)

donc $n \geq 18$, il faut 18 frappes de marteau pilon pour que l'épaisseur en millimètres de la pièce soit inférieure à 14 mm ce qui donne comme le temps minimal pour que la pièce soit terminée :

$$18 \times 6 = 108 \text{ s} = 1 \text{ minutes et } 48 \text{ secondes.}$$

Exercice 2

Partie A

1. $u_0 = 15000$. $u_1 = u_0 + 15000 = 245000$ €. Le chiffre d'affaires u_1 en 1991 était de 245 000 €

2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n .

u_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + $n + 1$, on a : $u_{n+1} = u_n + 15000$.

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $a = 15000$ et de premier terme $u_0 = 230\,000$

3. 2006 correspond au 16^{ème} rang donc

$$u_{16} = u_0 + 16a = 230000 + 16 \times 15000 = 230000 + 240000 = 470000 \text{ €} .$$

le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A est donc de 470 000 €

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. $v_0 = 150000$. $v_1 = v_0 \times 1,074 = 161100$. Le chiffre d'affaires v_1 en 1991 était de 161100 €

2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + n . v_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + $n + 1$,

on a : $v_{n+1} = v_n \times 1,074$. Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $b = 1,074$ et de premier terme $v_0 = 150\,000$

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B. $v_{16} = v_0 \times (q)^{16} = 150000 \times (1,074)^{16} = 470067 \text{ €}$

Partie C

1. On constate que les chiffres d'affaire des deux entreprises A et B en 2006 sont sensiblement les mêmes malgré le chiffre d'affaire plus conséquent de l'entreprise A en 1990.

2. $u_{31} = u_0 + 31a = 230000 + 31 \times 15000 = 695000$ €, donc $2 \times u_{31} = 1390000$ €

$$v_{31} = v_0 \times (q)^{31} = 150000 \times (1,074)^{31} = 1371589 , \text{ on est pas loin du double en effet.}$$

Exercice 3

En octobre 1998, Roberto payait sa facture annuelle de chauffage d'un montant de 800€.

1. L'augmentation de 2.5% par an se traduit par une multiplication par 1,025 1 d'une année sur l'autre.

En octobre 2008, la facture sera de $800 \times (1,025)^{10} = 1024$ € soit 1024 € arrondi à l'unité.

2. Le montant des factures F_n à l'année 1998 + n est une suite géométrique de raison 1,025 et de premier

terme $F_0 = 800$. La somme totale des factures est donnée par :

$$F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_{10} = F_0 \times \frac{q^{11} - 1}{q - 1} = 800 \times \frac{(1,025)^{11} - 1}{1,025 - 1} = 9987\text{€ (arrondi à l'euro).}$$

3. Le montant M_n des factures de Simone à l'année 1998 + n est une suite géométrique de raison 1,025 et de premier terme M_0 à déterminer. La somme totale des factures est donnée par :

$$14200 = M_0 \times \frac{(1,025)^{11} - 1}{1,025 - 1} \Leftrightarrow M_0 = \frac{14200 \times 0,025}{(1,025)^{11} - 1} = 1138\text{€}$$

(arrondi à l'euro).

Exercice 4

$$1. z_A = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$z_B = 2 - 2\sqrt{3}i$. Soit $\theta_B = \arg z_B$ défini par

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{a}{|z_1|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{b}{|z_1|} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ et ceci nous permet}$$

d'écrire $\theta_B = \arg z_B = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

donc $\theta_B = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ est un argument de z_B .

$$2. z_C = -4 \text{ et } z_D = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_C = -4. \text{ Soit } \theta_C = \arg z_C \text{ défini par } \begin{cases} \cos \theta_C = \frac{a}{|z_1|} = \frac{-4}{4} = -1 \\ \sin \theta_C = \frac{b}{|z_1|} = \frac{0}{4} = 0 \end{cases}, \text{ et ceci nous permet}$$

d'écrire $\theta_C = \arg z_C = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$z_D = -1 + \sqrt{3}i. \text{ Soit } \theta_D = \arg z_D \text{ défini par } \begin{cases} \cos \theta_D = \frac{a}{|z_1|} = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta_D = \frac{b}{|z_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ et ceci nous permet}$$

d'écrire $\theta_D = \arg z_D = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. donc $\theta_D = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ est un argument de z_B .

$$3. |z_A| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4; |z_B| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4; |z_C| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Comme $OA = OB = OC = 4$, on conclut que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

$$4. z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = 2 - 2\sqrt{3}i - 2 - 2\sqrt{3}i = -4\sqrt{3}i \text{ donc } \overline{AB}(0; -4\sqrt{3}) \text{ et } AB = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

$$z_{\overline{AD}} = z_D - z_A = -1 + \sqrt{3}i - 2 - 2\sqrt{3}i = -3 - \sqrt{3}i \text{ donc } \overline{AD}(-3; -\sqrt{3}) \text{ et } AD = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$z_{\overline{BD}} = z_D - z_B = -1 + \sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i = -3 + 3\sqrt{3}i \text{ donc } \overline{BD}(-3; 3\sqrt{3}) \text{ et } BD = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6.$$

On constate que $AB^2 = AD^2 + BD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore BDA est rectangle en D

$$5. z_{\overline{AC}} = z_C - z_A = -4 - 2 - 2\sqrt{3}i = -6 - 2\sqrt{3}i \text{ donc } \overline{AC}(-6; -2\sqrt{3}) \text{ et } AC = \sqrt{(-6)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = -4 - 2 + 2\sqrt{3}i = -6 + 2\sqrt{3}i \text{ donc } \overline{BC}(-6; 2\sqrt{3}) \text{ et } AC = \sqrt{(-6)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Comme $AB = BC = CA = 4\sqrt{3}\text{cm}$, le triangle ABC est triangle équilatéral.

