

DS 4 MATHÉMATIQUES TERMINALE D 2008-2009

Exercice 1 – 5 points

Une urne contient quatre boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 4. Une expérience aléatoire se déroule de la manière suivante : On tire au hasard une première boule de l'urne et on note son numéro. Après avoir remis cette boule dans l'urne, on en tire au hasard une seconde dont on note aussi le numéro. À l'issue de cette expérience, on obtient un couple de nombres (on rappelle que, par exemple, le couple (2 ; 3) est différent du couple (3 ; 2)).

1. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau, établir la liste des 16 couples possibles.
- 2.a. On note A l'évènement « obtenir un couple de nombres pairs ».
Déterminer la probabilité de l'évènement A
- b. On note B l'évènement « obtenir un couple de nombres impairs ».
Calculer la probabilité de l'évènement B.
- c. On note C l'évènement « obtenir un couple de nombres de parité différente ».
Calculer la probabilité de l'évènement C.
3. On organise un jeu. Un joueur mise 2 euros et réalise ensuite l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.
 - Si l'évènement A est réalisé, le joueur reçoit 8 euros de l'organisateur du jeu ;
 - Si l'évènement B est réalisé, le joueur reçoit 4 euros de l'organisateur du jeu ;
 - Si l'évènement C est réalisé, le joueur donne 4 euros à l'organisateur du jeu.On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.
Par exemple, s'il obtient le couple (2 ; 2), son gain est 6 euros.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

d. On dit qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.

Quelle aurait du être la mise du joueur pour que le jeu soit équitable ?



Exercice 2- 5 points

Dans un atelier de réparation un technicien s'occupe des ordinateurs en panne qui lui arrivent.

Les composants à l'origine de la panne peuvent uniquement être :

l'alimentation, la carte graphique ou le processeur.

Une panne simultanée de deux ou trois composants est possible. Le technicien chargé de la détection des pannes établit le diagnostic d'un ordinateur à l'aide d'un triplet utilisant les initiales des composants, surmontées d'une barre en cas de panne. Par exemple: (A;CG; $\bar{P}$) signifie que l'alimentation et la carte graphique fonctionnent et que la panne provient du processeur.

1. Établir la liste des sept diagnostics possibles sur un ordinateur en panne.
2. On suppose que les sept diagnostics ont la même probabilité d'être établis.
Quelle est la probabilité pour qu'un seul des composants soit en panne ?

3. le tableau suivant donne le coût des composants à remplacer : Le coût d'une réparation est celui du remplacement des pièces auquel il faut ajouter un forfait de main-d'œuvre de 25 € indépendant du nombre de composants à Remplacer.

composant	alimentation	carte graphique	processeur
prix en €	80	160	80

- 3.a. Soit X la variable aléatoire qui à chaque ordinateur en panne associe le coût de la réparation.
Donner la liste des valeurs possibles de X.
- 3.b. Donner dans un tableau la loi de probabilité de X.
- 3.c. Calculer l'espérance mathématique de X. Arrondir le résultat à l'unité.
- 3.d. Quel devrait être le coût du forfait de la main-d'œuvre, arrondi à l'unité, pour que le prix moyen d'une réparation soit de 200 € ?

Problème 10 points

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A: Recherche d'une fonction

Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $g(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x + c$, où a , b et c sont trois réels.

Déterminer a , b et c sachant que sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ passe par

les points A(1 ; 2), B(e ; 0) et C(e^2 ; 0).

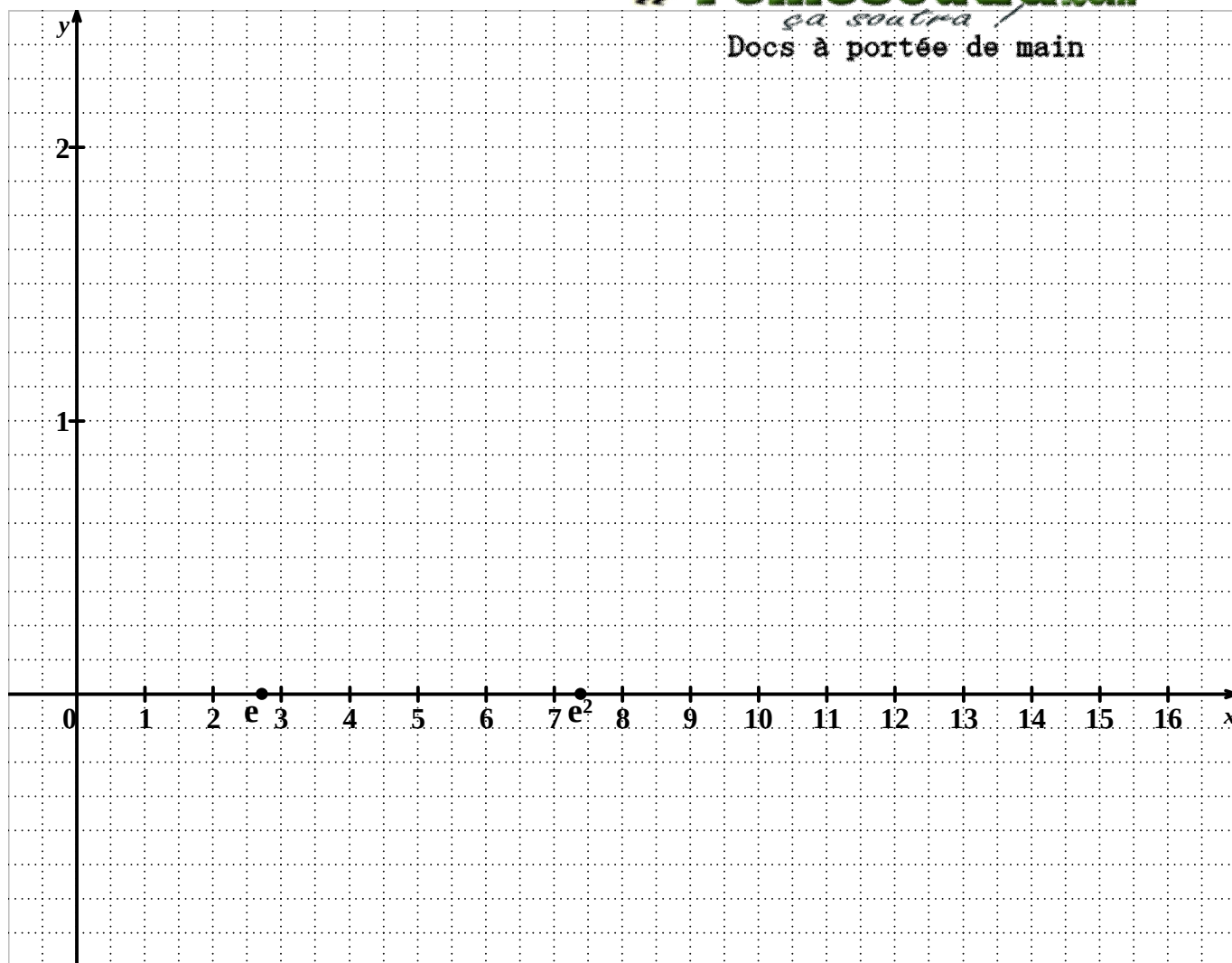
Partie B: Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2$.

1. a. Calculer la limite de f en 0.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout x de $]0; +\infty[$,
on a : $f(x) = \ln x(\ln x - 3) + 2$
2. a. Montrer que : $f'(x) = \frac{2\ln x - 3}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
b. Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue X : $X^2 - 3X + 2 = 0$.
b. En déduire les solutions exactes dans $]0; +\infty[$ de l'équation : $f(x) = 0$.
c. Déduire, des questions 2.c. et 3.b, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. On note Γ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
a. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe Γ au point d'abscisse e .
b. Tracer la courbe Γ et la tangente (Δ) .
5. Soit H la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $H(x) = x(\ln x)^2 - 5x \ln x + 5x$
Calculer $H'(x)$ et conclure.
6. calculer le nombre $A = H(e^2) - H(e)$.

 **Fomesoutra**.com
ça s'écrit
Docs à portée de main



PROBLEME

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x - 1 - \frac{9}{2}x^2$

(où $\ln$ désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Etudier son signe sur $]0; +\infty[$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
3. En déduire pour tout $x \in]0; +\infty[$ le signe de $g(x)$.

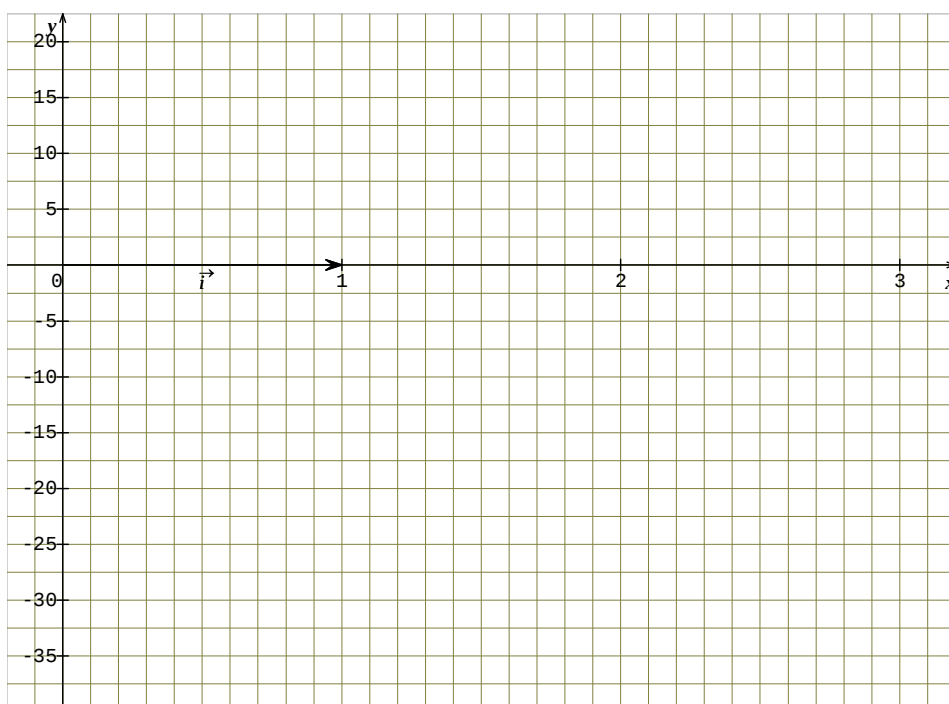
Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -9x + 5 - \frac{2\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).
4. soit (Δ) la droite d'équation $y = -9x + 5$. On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - (-9x + 5)$.
 - a. Démontrer que (Δ) est asymptote à la courbe C .
 - b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ
 - c. Etudier la position relative de C et Δ sur $]0; +\infty[$
5.
 - a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f
 - b. Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$.
 - c. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.
7. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
8. Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $[1/2; 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main



Correction

Exercice 1 :

1.

2. a) On note A l'événement « obtenir un couple de nombres pairs »

On cherche dans le tableau les couples de nombres pairs : $\{(2; 2), (2; 4), (4; 2), (4; 4)\}$

Il y a donc 4 couples favorables sur les 16 couples disponibles et on a donc

$$p(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

		1 ^{er} tirage			
		1	2	3	4
2 ^{ème} tirage	1	(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)
	2	(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)
	3	(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)
	4	(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)

b) On note B l'événement « obtenir un couple de nombres impairs »

On cherche dans le tableau les couples de nombres pairs : $\{(1; 1), (1; 3), (3; 1), (3; 3)\}$

Il y a donc 4 couples favorables sur les 16 couples disponibles et on a donc $p(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

c) On note C l'événement « obtenir un couple de nombres de parité différente »

l'événement « obtenir un couple de nombres de parité différente » est l'événement contraire de $D = \{ \text{« obtenir un couple de nombres pairs » et « obtenir un couple de nombres impairs »} \}$

Donc $p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, puisque les événements A et B sont disjoints

$$\text{Donc } p(C) = 1 - p(D) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3. a) événement A : $X = 8 - 2 = 6$; événement B : $X = 4 - 2 = 2$; événement C : $X = -4 - 2 = -6$
La variable aléatoire X peut prendre les valeurs suivantes : 6 ; 2 ; -6

b)

$X = x_i$	-6	2	6
$p(X = x_i)$	$p(C) = \frac{1}{2}$	$p(B) = \frac{1}{4}$	$p(A) = \frac{1}{4}$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$$c) E(X) = -6 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{4} = -3 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = -1$$

d) Le jeu n'est pas équitable puisque en moyenne on perd 1€

Soit $G' = m - G$; $E(G') = E(m - G) = m - E(G) = m - 1$, soit $E(G') = 0 \Leftrightarrow m = 1$

il faudrait que la mise soit un 1 euro moins chère, donc une mise de 1euros ($2 - 1 = 1€$) pour que l'espérance soit égale à 0.

AUTRE METHODE

$X = x_i$	$-4 - m$	$4 - m$	$8 - m$
$p(X = x_i)$	$p(C) = \frac{1}{2}$	$p(B) = \frac{1}{4}$	$p(A) = \frac{1}{4}$

$$E(G') = (-4 - m) \times \frac{1}{2} + (4 - m) \times \frac{1}{4} + (8 - m) \times \frac{1}{4} = m - 1. \quad E(G') = 0 \text{ équivaut à } m - 1 = 0 \text{ soit } m = 1€.$$

Pour que le jeu soit équitable il faut une mise de 1€.

Exercice 3

1- Lorsqu'un ordinateur est en panne, cela peut provenir :

Soit d'un seul composant en panne : il y a dans ce cas trois diagnostics possibles symbolisés par :

$(\bar{A}; CG; P)$; $(A; \bar{C}\bar{G}; P)$; $(A; C\bar{G}; \bar{P})$

Soit de deux composants en panne : il y a dans ce cas trois diagnostics possibles symbolisés par :

$(\bar{A}; \bar{C}\bar{G}; P)$; $(\bar{A}; C\bar{G}; \bar{P})$; $(A; \bar{C}\bar{G}; \bar{P})$. Soit des trois composants en panne simultanément: c'est le cas $(\bar{A}; \bar{C}\bar{G}; \bar{P})$.

Donc on a : $E = \{ (\bar{A}; C\bar{G}; P) ; (A; \bar{C}\bar{G}; P) ; (A; C\bar{G}; \bar{P}) ; (\bar{A}; \bar{C}\bar{G}; P) ; (\bar{A}; C\bar{G}; \bar{P}) ; (A; \bar{C}\bar{G}; \bar{P}) ; (\bar{A}; \bar{C}\bar{G}; \bar{P}) \}$

2- soit B l'événement « un seul composant est en panne » cet événement est formé de trois issues favorables

L'univers E est formé de sept issues possibles. Puisqu'on suppose l'équiprobabilité de sept diagnostics
On a donc : $P(B) = 3/7$.

- 3.a) Si seule l'alimentation est en panne, le coût de la réparation est $80 + 25 = 105$ €.
Si seule la carte graphique est en panne, le coût de la réparation est $160 + 25 = 185$ €.
Si seul le processeur est en panne, le coût de la réparation est $80 + 25 = 105$ €.
Si l'alimentation et la carte graphique sont en panne, le coût de la réparation est $80 + 160 + 25 = 265$ €.
Si l'alimentation et le processeur sont en panne, le coût de la réparation est $80 + 80 + 25 = 185$ €.
Si la carte graphique et le processeur sont en panne, le coût de la réparation est $180 + 80 + 25 = 265$ €.
Si les trois composants sont en panne, le coût de la réparation est : $80 + 160 + 80 + 25 = 345$ €.

Donc la liste des valeurs possibles de X est : $X = \{ 105 ; 185 ; 265 ; 345 \}$

3.b) Pour 105 €, on a deux cas favorables : $(\bar{A}; \overline{CG}; P)$ et $(A; \overline{CG}; \bar{P})$, donc $P(X = 105) = \frac{2}{7}$.

Pour 185 €, on a deux cas favorables : $(A; \overline{CG}; P)$ et $(\bar{A}; \overline{CG}; \bar{P})$, donc $P(X = 185) = \frac{2}{7}$.

Pour 265 €, on a deux cas favorables : $(\bar{A}; \overline{CG}; P)$ et $(A; \overline{CG}; \bar{P})$, donc $P(X = 265) = \frac{2}{7}$.

Pour 345 €, on a un seul cas favorable : $(\bar{A}; \overline{CG}; \bar{P})$, donc $P(X = 345) = \frac{1}{7}$.

3.c) $E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \times P(X = x_i)$, donc $E(X) = 105 \times \frac{2}{7} + 185 \times \frac{2}{7} + 265 \times \frac{2}{7} + 345 \times \frac{1}{7}$

$E(X) = \frac{210 + 370 + 530 + 345}{7} = \frac{1455}{7} \approx 208$ €. le coût moyen de réparation

est 208 €.

3.d) le prix moyen d'une réparation est de 208 € pour un forfait de 25 €.

Si on diminue ce forfait 8 € le prix moyen de réparation va passer à

200 €. En effet : dans ce cas X prend 97 ; 177 ; 257 ; 337

On a alors : $E(X) = 97 \times \frac{2}{7} + 177 \times \frac{2}{7} + 257 \times \frac{2}{7} + 337 \times \frac{1}{7}$; $E(X) = \frac{194 + 314 + 514 + 337}{7} = \frac{1399}{7} \approx 200$ €

$$E(X) = (80 + c) \times \frac{2}{7} + (160 + c) \times \frac{2}{7} + (240 + c) \times \frac{2}{7} + (320 + c) \times \frac{1}{7} \cdot 7E(X) = (80 + c) \times 2 + (160 + c) \times 2 + (240 + c) \times 2 + (320 + c)$$

$$7 \times 200 = 160 + 160 + 480 + 320 + 2c + 2c + 2c + c ; 1400 = 7c + 1280 \text{ soit } 7c = 1400 - 1280 = 120 \text{ et } c = \frac{120}{7} \approx 17 \text{ €}$$

Problème

Partie A

$$g(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x + c$$

$A \in \mathbb{C}$, donc les coordonnées du point A vérifie l'équation de g :

$$g(1) = a(\ln 1)^2 + b \ln 1 + c = 2 ; \ln 1 = 0, \text{ donc } c = 2, \text{ de même } B \in \mathbb{C}, \text{ on a :}$$

$$g(e) = a(\ln e)^2 + b \ln e + c = 0 \Rightarrow a + b + 2 = 0, \text{ puisque } \ln e = 1$$

$$C \in \mathbb{C} \Rightarrow g(e^2) = a(\ln e^2)^2 + b \ln e^2 + c = 0 \Rightarrow a(2 \ln e)^2 + 2b \ln e + 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b + 2 = 0$$

On doit résoudre un système d'équation linéaire à deux inconnues : $\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = -3$

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2$

$$1.a \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} ((\ln x)^2 - 3 \ln x + 2) \text{ or } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \text{ d'où } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln x)^2 = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -3 \ln x = +\infty$$

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$. La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x ((\ln x) - 3) + 2 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln x) - 3) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$3.a \text{ f est dérivable sur }]0; +\infty[; f(x) = (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 \quad f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - 3 \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{3}{x}.$$

$$(\text{car } (u^2)' = 2u'u \text{ et } (\ln x)' = \frac{1}{x}) \text{ pour tout réel x de l'intervalle }]0; +\infty[: f'(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x}.$$



3.b variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2\ln x - 3}{x}$ $x \in]0; +\infty[$, donc $x > 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{3/2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2\ln x > 3 \Leftrightarrow \ln x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{3/2}$$

$$f(e^{3/2}) = (\ln e^{3/2})^2 - 3\ln(e^{3/2}) + 2 = (3/2\ln e)^2 - 3 \times \frac{3}{2}\ln e + 2$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9 - 18 + 8}{4} = -\frac{1}{4}$$

x	0	$e^{3/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$ ↘ -1/4 ↗ $+\infty$	

c. d'après 1.b, on a : $f(x) = 0$ si $x = e$ ou $x = e^2$. En regardant le tableau de variation, on peut en déduire le signe de f sur $]0; +\infty[$.

$$f(x) > 0 \text{ pour } x \in]0; e[\cup]e^2; +\infty[; f(x) < 0 \text{ pour } x \in]e; e^2[; f(x) = 0 \text{ pour } x = e \text{ et } x = e^2.$$

3. a. $x^2 - 3x + 2 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$; $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. $S = \{1; 2\}$

b. sur l'intervalle $]0; +\infty[$, résolvons l'équation $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$. Posons $X = \ln x$. L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$. On a vu que $X = 1$ ou $X = 2$.

$$\ln x_1 = 1 = \ln e \Leftrightarrow x_1 = e \quad \ln x_2 = 2 = 2\ln e = \ln e^2 \Leftrightarrow x_2 = e^2 \quad S = \{e; e^2\}.$$

c. $f(x) = (\ln x - 1)(\ln x - 2)$

x	0	e	e^2	$+\infty$
$\ln x - 1$		- 0 +		+
$\ln x - 2$		-	- 0 +	
$f(x)$		+	0 - 0 +	

Fomesoutra.com
ça soutra !
 Docs à portée de main

4. Equation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$:

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) ; f'(\sqrt{e}) = \frac{2\ln(e) - 3}{e} = \frac{2 - 3}{e} = -\frac{1}{e} ;$$

$$f(e) = (\ln e)^2 - 3\ln e + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 ; y = \frac{-1}{e}(x - e) = \left(\frac{-1}{e}\right)x + 1, \text{ donc (T) : } \boxed{y = \frac{-1}{e}x + 1}.$$

5.a. voir courbe ci-contre

b. Calculons $F'(x)$. $H(x) = x(\ln x)^2 - 5x \ln x + 5x$

$$F'(x) = (\ln x)^2 + \frac{2x \times \ln x}{x} - 5\ln x - 5x \times \frac{1}{x} + 5$$

$$F'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 5\ln x - 5 + 5 \text{ d'où}$$

$$F'(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = f(x),$$

6. $H(x) = x(\ln x)^2 - 5x \ln x + 5x$

$$H(e^2) = e^2 (\ln e^2)^2 - 5e^2 \ln e^2 + 5e^2$$

$$= e^2 (2\ln e)^2 - 10e^2 + 5e^2$$

$$= 4e^2 - 5e^2 = -e^2$$

$$H(e) = e(\ln e)^2 - 5e \ln e + 5e = e - 5e + 5e = e.$$

$$A = H(e^2) - H(e) = -e^2 - e$$

