

Exercice : 6 points

On considère les nombres complexes : $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ $z_2 = 1 - i$ $z_3 = \frac{2}{z_2}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Mettre les nombres z_3 sous forme algébrique.
2. Calculer le module et un argument de z_1 , z_2 et z_3 , puis en déduire leur forme trigonométrique.
3. Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 .
4. Démontrer que le triangle BOC est rectangle en O.
5. Déterminer l'affixe z_4 du point D pour que le quadrilatère OADC soit un parallélogramme.
on mettra le nombre complexe z_4 sous la forme algébrique.



Exercice 2 : 3 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation : $x^2 - 4x - 5 = 0$
2. En déduire la résolution, dans l'ensemble des nombres réels, des équations suivantes :
 $(\ln x)^2 - 4 \ln x - 5 = 0$; $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3 \ln 2$

PROBLÈME : (11 points)

Dans tout le problème, le plan P est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+2+\ln x}{x}$

Partie A

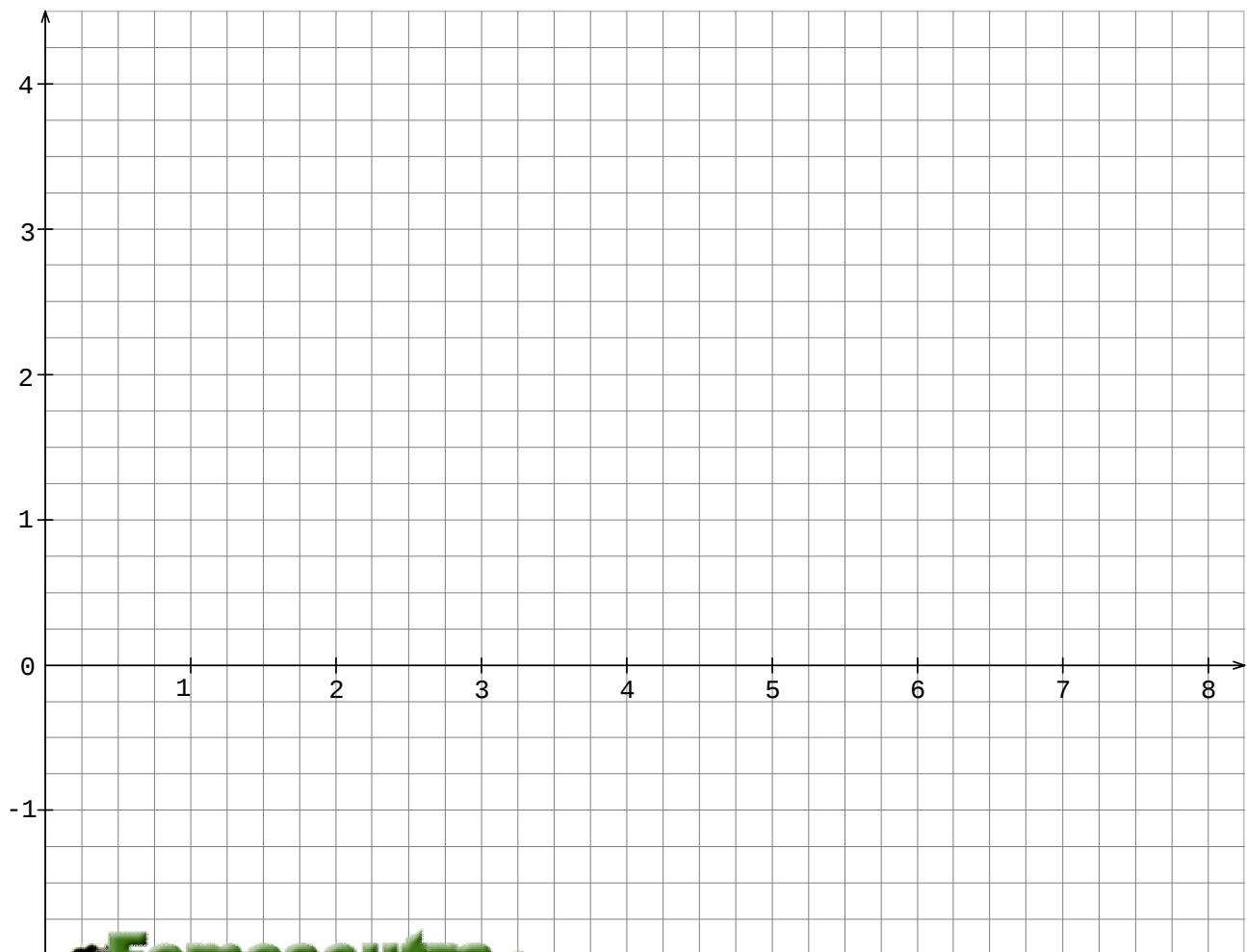
1. Il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe C . Le prouver par le calcul.
2. a) Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C . Donner son équation et la tracer sur la page
3. a) Prouver que, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$.
b) Montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{e}$.
c) Etablir le tableau de variation de f . Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f .
d) Tracer La courbe représentative C de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

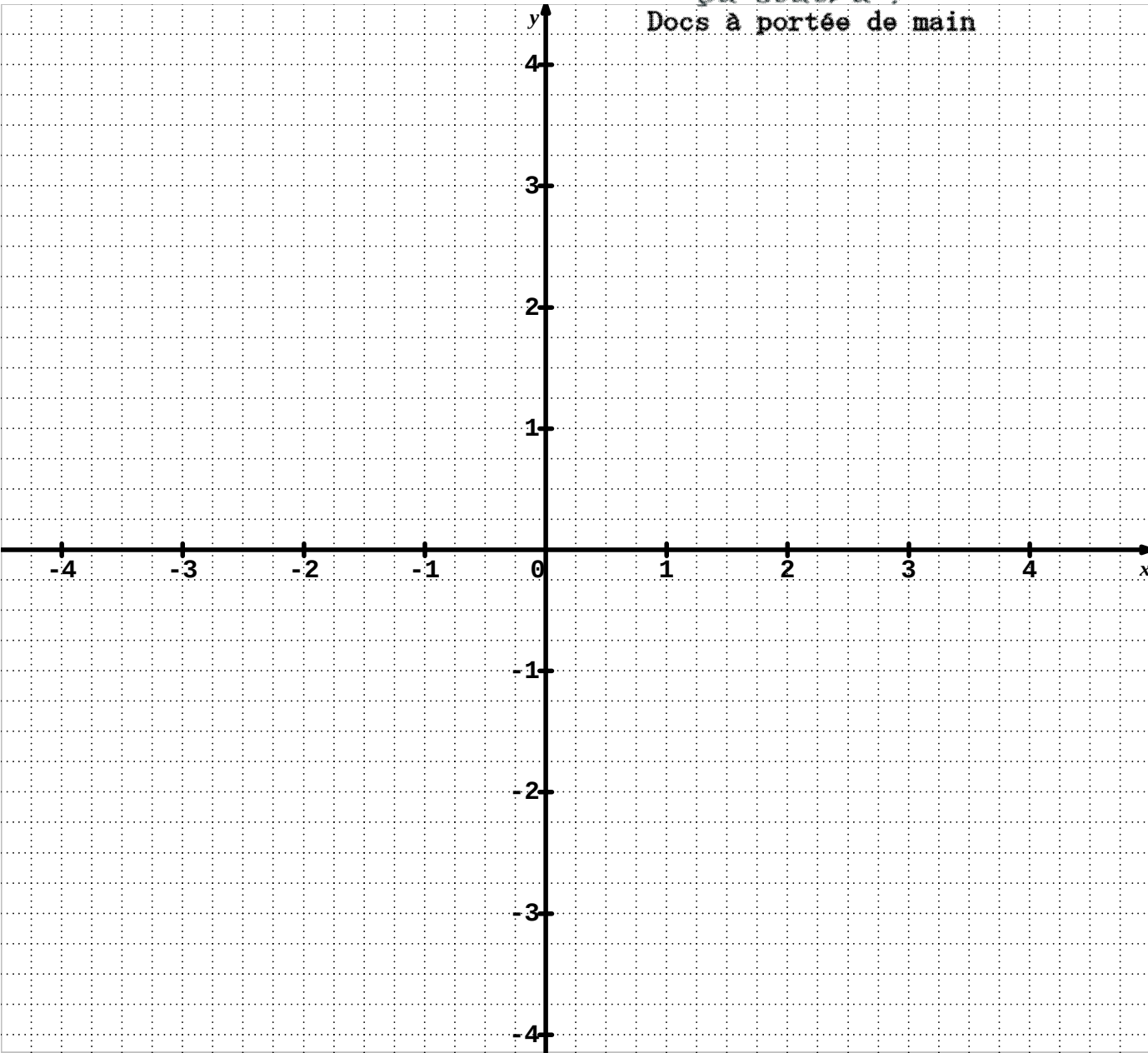
Partie B

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x+2}{x}$ et H la courbe représentative de g .
a) Etudier rapidement la fonction g sur $]0; +\infty[$ (dérivée, limites, tableau de variation).
b) Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H .
2. a) Calculer $f(x) - g(x)$ et étudier son signe.
b) Montrer que les deux courbes C et H se coupent en un point K d'abscisse 1.
c) Etudier la position relative des deux courbes C et H .
Placer le point K et construire la courbe H dans le repère précédent.

Annexe problème

x	0,1	0,2	0,5	1	2	2,5	3	4	5	7	8
$g(x)$											
$f(x)$											





Correction

Exercice 1

$$z_3 = \frac{2}{z_2} = \frac{2}{1-i} = 1+i$$

$$|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

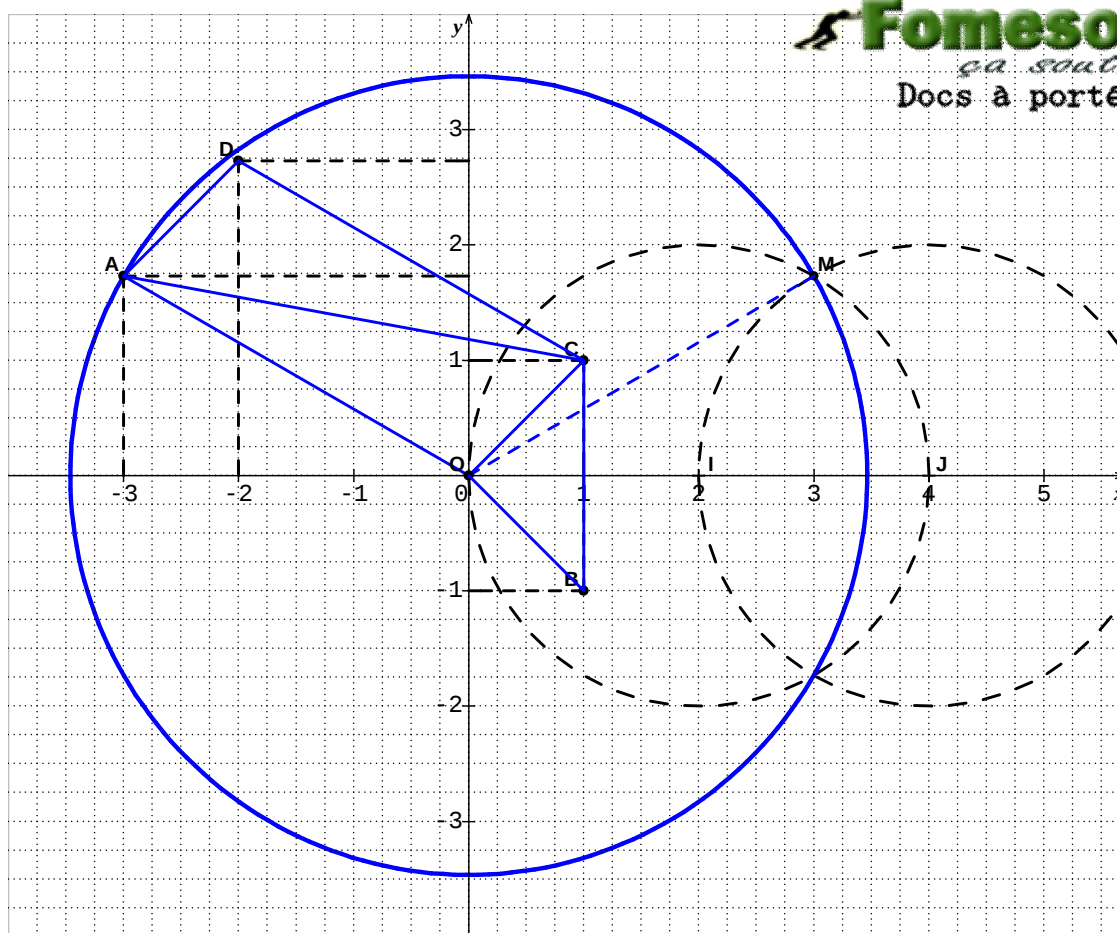
$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|z_3| = \left| \frac{2}{z_2} \right| = \frac{2}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \arg z_1 : \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta_2 = \arg z_2 : \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ donc } \theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}, \text{ comme } z_3 = \overline{z_2},$$

$$\text{on a : } \arg z_2 = -\arg z_1 + 2k\pi, \text{ donc } \theta_3 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$



Fomesoutra.com
ça s'écrit !
 Docs à portée de main

On sait que $|z_2| = |z_3| = \sqrt{2}$, on déduit que le triangle BOC est isocèle en O.

$$z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = 1+i - (1-i) = 1+i-1+i = 2i, \text{ donc } BC = |z_{\overline{BC}}| = 2$$

$BC^2 = 4$ et $OB^2 + OC^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 2+2 = 4$, on déduit que $BC^2 = OB^2 + OC^2$ et par conséquent le triangle BOC est rectangle isocèle en O.

OADC est un parallélogramme signifie que $z_{\overline{AD}} = z_{\overline{OC}}$, donc $z_D - z_A = z_C$ ou encore

$$z_D = z_C + z_A = 1+i - 3+i\sqrt{3} = -2 + (1+\sqrt{3})i$$

Exercice 2

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times (-5) = 16 + 20 = 36 > 0, \text{ donc 2 racines distinctes}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 6}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 6}{2} = 5 \quad . \quad S_0 = \{-1; 5\}$$

2. $(\ln x)^2 - 4 \ln x - 5 = 0$, $\ln x$ est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on pose $X = \ln x$ et on obtient

$$X^2 - 4X - 5 = 0 \quad \text{et on a} \quad X_1 = \ln x_1 = -1 \quad \text{ou} \quad X_2 = \ln x_2 = 5$$

$$\text{Donc} \quad \ln x_1 = -1 = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{e} \quad \ln x_2 = 5 \ln e = \ln e^5 \Leftrightarrow x_2 = e^5, \quad S = \left\{ e^5; \frac{1}{e} \right\}$$

b. $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3 \ln 2$. Cette équation est définie pour tout réel x tels que : $x-3 > 0$ et $x-1 > 0$
 $x > 3$ et $x > 1$, donc elle est définie sur $]3; +\infty[$

$$\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3 \ln 2 \Leftrightarrow \ln(x-3)(x-1) = \ln 2^3 = \ln 8 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0, \text{ donc } x_1 = -1 \text{ ou } x_2 = 5, \text{ donc une seule solution est acceptable}$$

Puisque $x_1 = -1 \notin]0; +\infty[$, donc $S' = \{5\}$

Fomesoutra.com

ça s'entraîne !

Docs à portée de main

Problème

PARTIE A : Etude de fonction f

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 + \ln x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Il vient $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 + \ln x) \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 + \ln x) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$
 donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ alors l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C.

2a) Pour tout x de $]0; +\infty[$ $f(x) = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$ soit $f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

b) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

c) On en déduit que la courbe C admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$. voir courbe.

3a) Pour tout x de $]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{(1 + \frac{1}{x})x - (x + 2 + \ln x)}{x^2}$ $f'(x) = \frac{x + 1 - x - 2 - \ln x}{x^2}$. $f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$

b) $f'(x) \geq 0 \quad \frac{-1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \quad \text{et } x \in]0; +\infty[\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad -1 - \ln x \geq 0 \quad \Leftrightarrow -\ln x \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq -1$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \frac{-1 - \ln x}{x^2} \leq 0 \quad \text{et } x \in]0; +\infty[\Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Donc $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = \frac{1}{e}$

c) Il en résulte le tableau de variation de f :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$1+e$	1

PARTIE B :

1) g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x+2}{x}$

a) $g'(x) = \frac{x - (x+2)}{x^2}$; $g'(x) = \frac{-2}{x^2}$ Comme $g'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$ alors la fonction g est strictement décroissante
 sur $]0; +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Il en résulte le tableau de variation suivant :

b) La courbe H admet comme asymptote l'axe des ordonnées et la droite D.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	1

2)a) $f(x) - g(x) = \frac{x+2+\ln x - (x+2)}{x^2} = \frac{\ln x}{x}$ Sur $]0; +\infty[$ $f(x) - g(x)$ est du signe de $\ln x$

Donc $f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$ et $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

b) Les deux courbes C et H se coupent en un point A d'abscisse 1, car $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

c) On en déduit que : C est au-dessous de H sur $]0; 1]$ et C est au-dessus de H sur $[1; +\infty[$

x	0,1	0,2	0,5	1	2	2,5	3	4	5	7	8
$g(x)$	21	11	5	3	2	1,8	1,7	1,5	1,4	1,29	1,25
$f(x)$	-2,03	2,95	3,61	3	2,35	2,2	2,03	1,85	1,72	1,56	1,51

