Devoir Surveillé n°10 de Mathématiques Terminale D

Exercice 1 : 4 pts

Recopier sur votre feuille le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse. Aucune justification n'est demandée. Une seule proposition est correcte.

1. Soit (u_n) une suite de nombres telle que pour passer d'un terme au suivant, on divise toujours par 4. Alors sa raison est

   A. 4 B. $0,4$ C. $0,25$ D. La suite n'est ni géométrique, ni arithmétique.

2. La population d'un village de 500 habitants augmente chaque année de 5%. Au bout de n années la population sera :

   A . $500+25\,n$ B. $500\times(1,05)^n$ C . $500\times(0,05)^{n-1}$ D . $100+25^n$

3. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3=16$ et $u_9=-20$. Alors sa raison est

   A. -4 B. -6 C. $1,04$ (environ) D. $1,02$ (environ)

4. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $0,99$, de premier terme $u_1=40000$.
   Alors elle passe sous la barre des 20000 à partir de n égal à :

   A. 71 B. 70 C. 69 D. 68

5. La suite $u_0=10$; $u_1=1$; $u_2=0,1$; ….. .... ; $u_5=0,0001$; …… ... est :

   A. géometrique de raison $(-0,1)$ B. croissante C. arithmétique de raison (-10)

   D. géometrique de raison $0,1$

6. (w_n) est la suite arithmétique telle que $w_0=21$ et $w_{12}=-15$. Alors :

   (a) sa raison est A . 3 B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. $-\frac{36}{13}$

   (b) la somme $w_0+w_1+w_2+......+w_{12}$ vaut :

   A . 234 B. -216 C . 39 D. 36

Exercice 2 ; 3 pts

En octobre 1998, Roberto payait sa facture annuelle de chauffage d'un montant de 800€.

1. Sachant que cette facture a augmenté de $2,5\ \%$ par an, quelle a été la facture payée par Roberto en octobre 2008 (arrondir à l'euro) ?
2. En supposant que cette évolution se poursuit, déterminer la somme totale payée par Roberto entre octobre 1998 et octobre 2008 (arrondir à l'euro).
3. Simone a elle perdu sa facture d'octobre 98 mais elle sait que la somme de ses factures entre octobre 98 et octobre 2008 est de 14200€. Sachant que chacune de ses factures a augmenté de $2,5\ \%$ par an, comme son ami d'enfance Roberto, retrouver le montant de sa facture en 1998.
4. Déterminer le taux d'évolution global d'augmentation entre le 1er octobre 2008 et le 1er octobre 1998.

Exercice 3 : 7 pts

Le 01/01/2008, un nouvel employé dans une entreprise se voit proposer deux formules pour l'évolution de son salaire mensuel : dans la formule *A*, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 20 euros ; dans la formule *B*, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 1,5 %. Son salaire mensuel initial durant l'année 2008 est de 1200 euros. On note u_n (respectivement v_n) le salaire annuel selon la formule A (respectivement B) durant l'année $2008+n$.

1. Expliquer pourquoi, en 2008, on a $u_0 = v_0 = 14400$
2. Expliquer pourquoi, en 2009, on a $u_1 = 14640$ et $v_1 = 14616$.
3. Donner, en justifiant la réponse, la nature des deux suites étudiées. Préciser la raison pour chacune de ces deux suites.
4. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
5. Calculer et comparer les deux formules en 2018 puis en 2028 (arrondir les résultats au centime d'euro)
6. Cet employé partira à la retraite, au bout de 42 années complètes de travail dans cette entreprise. Il décide de calculer combien il aurait gagné d'argent dans toute sa carrière. On appelle S_n et T_n les sommes des termes des deux suites étudiées, définies par :
   $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ...u_{n-1} + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + v_2 + ...v_{n-1} + v_n$
   Calculer combien l'employé aurait gagné dans toute sa carrière selon chacune des formules A et B.

Exercice 4. 6 pts

Partie A

Le tableau suivant donne le prix (exprimé en euros) d'une machine de 1999 à 2004.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Prix y_i	18 300	18 900	19 800	20 400	21 000	21 900

1. Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de coordonnées (x_i ; y_i) associé à cette série statistique. On prendra sur l'axe des abscisses 2 cm pour unité, sur l'axe des ordonnées 1 cm pour un millier d'euros et en commençant à graduer à partir de 15 000.

2. On choisit pour ajustement affine du nuage de points la droite D qui a pour équation :
   $y = 700x + 17\ 600$.
   a) Tracer la droite D dans le repère orthogonal.
   b) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.
   c) Montrer par le calcul que G appartient à la droite D et le placer sur le graphique.

3. Déterminer graphiquement en faisant apparaître tous les tracés utiles, l'estimation du prix de la machine en 2005. Retrouver ce résultat par le calcul.

Partie B

Monsieur Guillaume, artisan menuisier, désire acquérir la machine en 2005.
Au 1er janvier 2001, il a placé la somme de 16 000 euros, à intérêts composés au taux annuel de 6,75 %. On note u_n le capital, exprimé en euros, disponible au 1er janvier de l'année 2001 + n.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 (arrondir à l'unité près).

2. Montrer qu'il ne disposera pas au 1er janvier 2005 de la somme nécessaire à l'acquisition de la machine si le prix de celle-ci est estimé à 22 500 euros.
   Quelle somme lui manquera-t-il ? (arrondir à 100 euros près)

3. Déterminer la somme, exprimée en euros, qu'il aurait dû placer au 1er janvier 2001 pour disposer du capital nécessaire à l'achat de la machine au 1er janvier 2005 (arrondir la somme à 10 euros près).
   Estimation d'un prix à l'aide d'un ajustement affine puis déterminer la somme à placer à intérêts composés pour l'acquisition d'une machine.

Correction

Exercice 1

1. Soit (u_n) une suite de nombres telle que pour passer d'un terme au suivant, on divise toujours par 4.

Alors sa raison est donc de $\frac{1}{4}=0,25$, ***réponse C.***

2. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3=16$ et $u_9=-20$. On a donc

$u_9=u_3+(9-3)\times a \Leftrightarrow u_9-u_3=6a \Leftrightarrow a=\frac{-20-16}{6}=-6$, ***réponse B.***

2. soit u_n la population au bout de n années .or $u_0=500$ et comme la population augmente chaque année de 5 % , alors $u_{n+1}=u_n\times(1+0,05)=1,05u_n$(coefficient multiplicateur associé au taux de 5 %.

Ainsi u_n est géométrique de raison $b=1,05$ d'où $u_n=(1,05)^n u_0=500\times(1,05)^n$.

3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $0,99$, de premier terme $u_1=40000$. A l'aide de la formule $4000\times(0,99)^{n-1}$, on trouve qu'elle passe sous la barre des 20000 à partir de $n=70$, ***réponse B***.

4. La suite $u_0=10$; $u_1=1$; $u_2=0,1$; .... ; $u_5=0,0001$; : $\frac{u_1}{u_0}=\frac{1}{10}=0,1$;

$\frac{u_2}{u_1}=\frac{0,1}{1}=0,1$; ……. ; $\frac{u_5}{u_4}=\frac{0,0001}{0,001}=0,1$, donc(u_n) géométrique de raison $0,1$. : ***réponse D***.

5.a) w_n est une suite arithmétique de raison r (à trouver) et de premier terme $w_0=21$, donc $w_n=w_0+nr$

Donc $w_{12}=21+12r$ soit $-15=21+12r$ et $12r=-36$ donc $r=-3$: ***réponse C***.

b) La somme $w_0+w_1+w_2+......+w_{12}=(nombre\ de\ termes)\times\frac{(1^{er}\ terme+dernier\ terme)}{2}$, car c'est une suite

arithmétique . $w_0+w_1+w_2+......+w_{12}=13\times\frac{21-15}{2}=13\times 3=39$. ***:*** ***réponse C***.

Exercice 2

En octobre 1998, Roberto payait sa facture annuelle de chauffage d'un montant de 800€.

1. L'augmentation de 2.5% par an se traduit par une multiplication par $1,025$1 d'une année sur l'autre.

En octobre 2008, la facture sera de $800\times(1,025)^{10}=1024€$ soit 1024€ arrondi à l'unité.

2. Le montant des factures F_n à l'année $1998+n$ est une suite géométrique de raison $1,025$ et de premier terme $F_0=800$. La somme totale des factures est donnée par :

$$F_0+F_1+F_2+.........F_{10}=F_0\times\frac{q^{11}-1}{q-1}=800\times\frac{(1,025)^{11}-1}{1,025-1}=9987€ \quad \text{(arrondi à l'euro).}$$

3. Le montant M_n des factures de Simone à l'année $1998+n$ est une suite géométrique de raison $1,025$ et de premier terme M_0 à déterminer.

La somme totale des factures est donnée par : $14200=M_0\times\frac{(1,025)^{11}-1}{1,025-1}\Leftrightarrow M_0=\frac{14200\times 0,025}{(1,025)^{11}-1}=1138€$

(arrondi à l'euro).

Exercice 3

1. En 2006 , son salaire mensuel vaut 1200 € donc son salaire annuel vaut $12\times 1200=14400€$.

Ainsi $u_0=w_0=14400$(il n'y a pas encore d'augmentation).

2. avec la formule 1 , le salaire mensuel devient en 2007 : $1200+20=1220€$, donc le salaire annuel est : $u_1=12\times 1220=14640€$.

Avec la formule 2 , le salaire mensuel devient en 2007 : $1200\times 1,015=1218€$, donc le salaire annuel

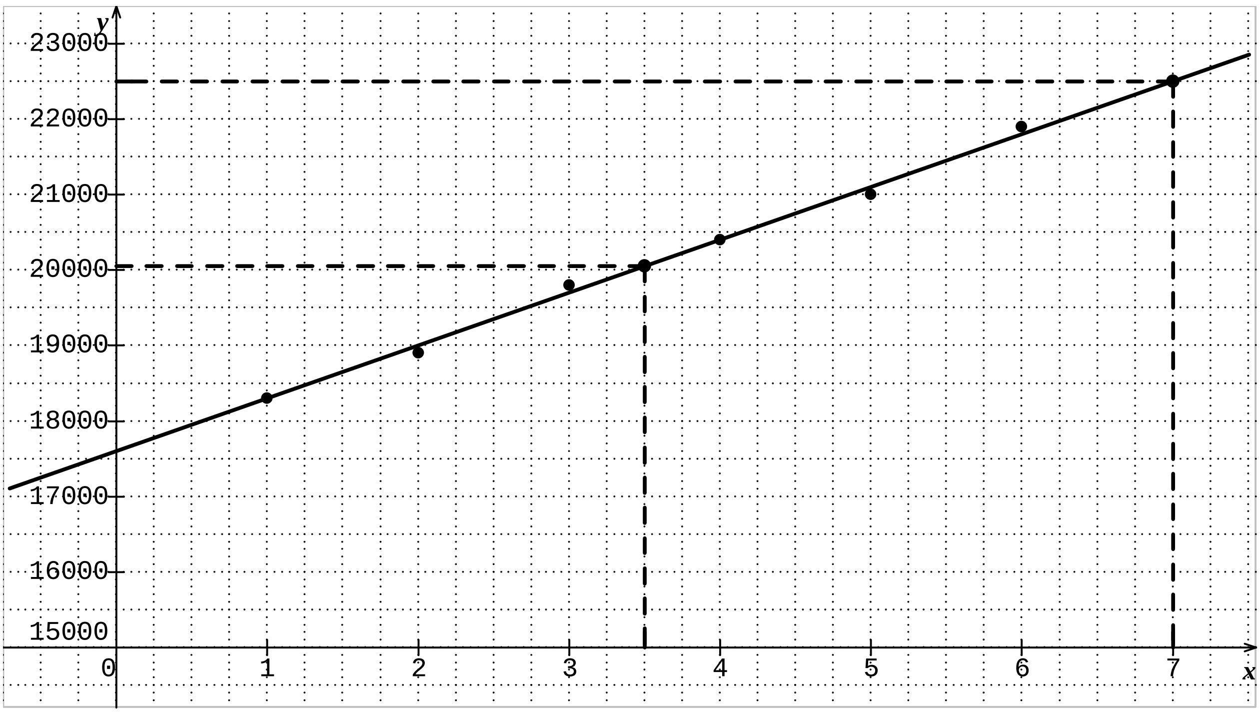
$w_1 = 12 \times 1218 = 14616€$.

3. D'une année à l'autre , avec la formule 1 , le salaire annuel est augmenté de $12 \times 20 = 240€$
   Ainsi $u_{n+1} = u_n + 240$. La suite (u_n)est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 14400€$ et raison $a = 240$.
   D'une année à l'autre , avec la formule 2 , le salaire mensuel est multiplié par 1,015 .
   Le salaire mensuel est $\frac{w_n}{12}$ et l'année suivante $\frac{w_{n+1}}{12}$, donc $\frac{w_{n+1}}{12} = 1,015 \times \frac{w_n}{12}$, d'où $w_{n+1} = 1,015 \times w_n$
   Le salaire annuel est également multiplié par 1,015 . w_n est donc une suite géométrique de premier terme $w_0 = 14400$ et de raison 1,015.
4. comme (u_n) est une suite arithmétique de raison $a = 240$; $u_n = u_0 + na = 14400 + 240n$.
   comme (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,015$; $w_n = w_0 \times q^n = 14400 \times (1,015)^n$.
5. En $2016 = 2006 + 10$, les salaires correspondantes à u_{10} et w_{10}
   $w_{10} = w_0 \times q^{10} = 14400 \times (1,015)^{10} \approx 16711,79€$ et $u_{10} = u_0 + na = 14400 + 240 \times 10 = 16800€$ ($w_{10} < u_{10}$)
   Donc en 2016 la formule A est plus avantageuse que la formule B
   En $2026 = 2006 + 20$, les salaires correspondantes à u_{10} et w_{10}
   $w_{20} = w_0 \times q^{20} = 14400 \times (1,015)^{20} \approx 19394,71€$ et $u_{20} = u_0 + 20a = 14400 + 240 \times 20 = 19200€$ ($u_{20} < w_{20}$)
   Donc en 2026 la formule B est plus avantageuse.
6. Avec la formule 1 , l'employé aurait après 42 ans de travail : $S_{41} = \frac{(41+1)(u_0 + u_{41})}{2}$
   Or $u_{41} = u_0 + 41a = 14400 + 240 \times 41 = 24240€$, donc $S_{41} = \frac{(42)(14400 + 24240)}{2} = 21 \times 38640 = 811440€$.
   Avec la formule 2 , l'employé aurait gagné pendant toute sa carrière :
   $T_{41} = 1440 \times \left(\frac{(1,015)^{n+1} - 1}{1,015 - 1} \right) = \frac{14400}{0,015} \left[(1,015)^{42} - 1 \right] \approx 834093,23€$. Enfin , sur l'ensemble de sa carrière , c'est la formule B la plus intéressante .

Exercice 4

PARTIE A

1.



2. a) La droite D d'équation $y = 700\,x + 17\,600$ passe par les points de coordonnées (0 ; 17 600) et (4 ; 20 400).

b) Les coordonnées du point moyen G sont : (3,5 ; 20 050).

c) Le point G appartient à la droite D car ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. En effet, $700 \times 3{,}5 + 17\,600 = 20\,050$.

3. Voir courbe En 2005, $x = 7$.Donc l'estimation du prix de la machine en 2005 est de $700 \times 7 + 17\,600$ soit 22 500 €.

PARTIE B

1. $u_1 = 16000 \times 1,0675 = 17080€$; $u_2 = u_1 \times 1,0675 = 17080 \times 1,0675 = 18233€$

$u_3 = u_2 \times 1,0675 = 18233 \times 1,0675 = 19464€$

2. La somme dont disposera M. Guillaume au 1er janvier 2005 est égale à u_4.

Or $u_4 = 1,0675 \times u_3 = 20777€$. Il manquera donc 1 723 €, soit 1 700 € à 100 € près.

3. Il aurait fallu que la somme S soit telle que : $(1{,}0675)^4 \times \Sigma > 22\,500$ $S > \dfrac{22500}{1,2985} \approx 17326€$

S > 17 326 €. et donc S = 17 330 € à 10 € près.