Devoir Surveillé n°15 de Mathématiques Terminale D

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures –

Matériel autorisé : Calculatrice graphique programmable

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.
Les candidats doivent traiter les deux exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

- Ce sujet comporte 4 pages -

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Exercice 1 : 5 points

Une personne a 5 jetons indiscernables au toucher dans sa poche : un jeton d'une valeur de 2 €, deux jetons d'une valeur de 1€ chacun et deux jetons d'une valeur de 0,50 € chacun.

Partie I

Cette personne choisit au hasard, *successivement et sans remise*, deux jetons dans sa poche.

On s'intéresse à la somme S des valeurs des deux jetons choisis.

1. Construire un arbre ou un tableau décrivant cette expérience.

   En déduire les valeurs possibles de la somme S.

2. Soit A l'évènement : « la somme S est égale à 1,5 »

   B l'évènement : « la somme S est égale à 1 ».

   a. Vérifier que la probabilité de l'évènement A est égale à 0, 4.

   b. Déterminer la probabilité de l'évènement B.

3. Déterminer la probabilité pour que la somme S soit supérieure ou égale à 2.

Partie II

Cette personne introduit les deux jetons choisis dans un appareil de stationnement.

Le coût est de 0,50 € pour une heure de stationnement. Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de deux jetons associe la durée maximale de stationnement autorisé, exprimée en heures.

1. Déterminer, en utilisant la partie I, la probabilité pour que X prenne la valeur 3.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice2 (***5 points***)

La plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$l'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et l'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation : $z^2+6\sqrt{3}z+36=0$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A=-3\sqrt{3}+3i \ ; \ z_B=-3\sqrt{3}-3i \quad \text{et} \quad z_C=-6\sqrt{3}$$

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

b. Ecrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif

et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c. Placer les points A, B, C dans le plan muni du repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

3.
a. Déterminer la nature du triangle ABC.

b. En déduire que le quadrilatère OACB est un losange.

4. On appelle K le point du plan complexe tel que $z_K=i\times z_A$

a. Donner la forme algébrique , puis la forme exponentielle de z_K

b. Démontrer que le triangle OAK soit rectangle et isocèle en O.

c. Construire le point K sur la figure.

__Problème 10 points__

__Partie A__ : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+3)e^x - 1$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.

2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g.

   En déduire le tableau de variation de g.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle $\left]-4\,;0\right[$.

4. Déduire des questions précédentes le signe de g(x) en fonction des valeurs de x.

__Partie B:__ Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^x - x$

On note ($\mathcal{C}_f$) la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$

(Unités graphiques : 4cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées).

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote la courbe ($\mathcal{C}_f$) en $-\infty$.

   c. Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (Δ) et ($\mathcal{C}_f$)

2. En remarquant que *f(x)* peut s'écrire $f(x) = e^x\left(x + 2 - \dfrac{x}{e^x}\right)$. déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Vérifier que pour tout réel, on a $f'(x) = g(x)$

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\left(\mathcal{C}_f\right)$ en son point A d'abscisse 0.

6. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

7. Tracer, dans le repère $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,\right)$,la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$la tangente (T)et l'asymptote (Δ).

(Utiliser la feuille de papier millimétré fournie)

Partie C.

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x)=(x+1)e^{x}$.

Calculer $H'(x)$ puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$

2. Calculer en cm² , l'aire A comprise entre la courbe ($\mathcal{C}_f$), l'axe des abscisses , la droite

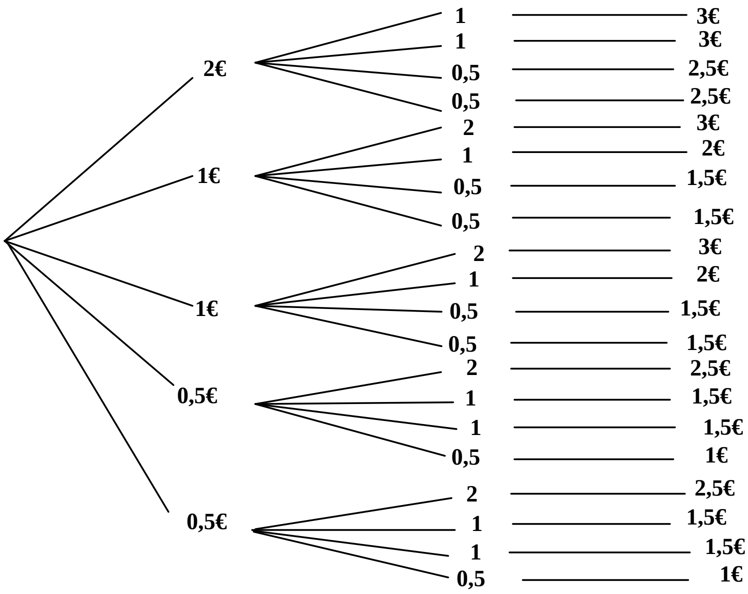
l'équation $x=-2$ et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction

Exercice 1

Partie 1

1. Arbre décrivant l'expérience aléatoire et donnant les valeurs possibles pour la somme S :



On dénombre 20 tirages possibles. Valeurs possibles pour S : {1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3}

2. a) Sur les 20 tirages possibles, il y en a 8 pour lesquels la somme est égale à 1,5 Euros, donc :

$p(A)=\dfrac{8}{20}=0,4$.

2. b) Pour que la somme soit égale à 1 il faut : tirer un jeton de 0,50€ puis un jeton de 0,50 €

Sur les 20 tirages possibles, il y a 2 tirages favorables pour lesquels la somme est égale à 1 Euro,

Soit une probabilité de $p(B)=\dfrac{2}{20}=0,1$.

3. Comme les valeurs possibles de la somme S sont 1 ;1,50 ; 2 ; 2,50 et 3

$p(S \geq 2) = p(S=2) + p(S=2,50) + p(S=3)$ ou encore $p(S \geq 2) = 1 - p(S=1) - p(S=1,50)$

Or $p(S=1,5) = p(A) = 0,4$ et $p(S=1) = p(B) = 0,1$, donc $p(S \geq 2) = 1 - 0,1 - 0,4 = 0,5$.

Partie II

1. comme 1 heure de stationnement coûte 0,50 € , 3h coûtent 1,5 € on a donc

$p(X=3) = p(S=1,5) = 0,4$ et $p(X=1) = p(S=2) = 0,1$

La durée de stationnement est de 3 heures lorsque la somme introduite est de 1,5 € :

$p(X=3) = p(S=1,5) = 0,4$

2. Le temps de stationnement est égal au double de la somme introduite.

$p(X=2) = p(S=1) = \frac{2}{20} = 0,1$; $p(X=4) = p(S=2) = \frac{2}{20} = 0,1$; $p(X=3) = p(S=1,5) = 0,4$

$p(X=5) = p(S=2,5) = \frac{4}{20} = 0,2$; $p(X=6) = p(S=3) = \frac{4}{20} = 0,2$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est définie par le tableau ci-dessous :

s_i	1 €	1,50 €	2 €	2,5 €	3
x_i	2	3	4	5	6
$p(X=x_i)$	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2

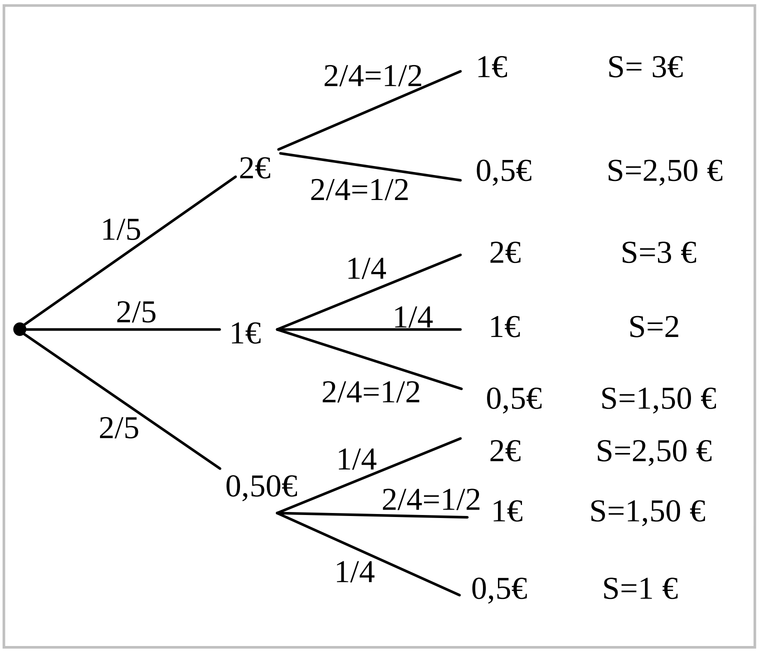
3. Calcul de l'espérance mathématique de X :

$$E(X=x_i) = \sum p(X=x_i)x_i = 0,1 \times 2 + 0,4 \times 3 + 0,1 \times 4 + 0,2 \times 5 + 0,2 \times 6 = 3,9$$

	0,5	0,5	1	1	2
0,5	$S=1$	$S=1$	$S=1,5$	$S=1,5$	$S=2,5$
0,5	$S=1$	$S=1$	$S=1,5$	$S=1,5$	$S=2,5$
1	$S=1,5$	$S=1,5$	$S=2$	$S=2$	$S=3$
1	$S=1,5$	$S=1,5$	$S=2$	$S=2$	$S=3$
2	$S=2,5$	$S=2,5$	$S=3$	$S=3$	$S=4$

Puisque on effectue de tirage sans remise, on élimine la somme sur la diagonale.

Un autre arbre utilisant la probabilité conditionnelle



$p(X=2)=p(S=1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=0,1$; $p(X=3)=p(S=1,5)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{10}=0,4$

$p(X=4)=p(S=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=0,1$

$p(X=5)=p(S=2,5)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{10}=0,2$; $p(X=6)=p(S=3)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{10}=0,2$

Autre méthode : Pour que la somme soit égale à 1,50 € il faut :

Soit tirer un jeton de 1€ puis un jeton de 0,50 € , soit une probabilité de $p_1=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{10}=0,2$.

Soit tirer un jeton de 0,50 € puis un jeton de 1 € , soit une probabilité de $p_2=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{10}=0,2$.

Donc $p(A)=\frac{8}{20}=0,4$.

Pour que la somme soit égale à 1 il faut : tirer un jeton de 0,50€ puis un jeton de 0,50 €

Soit une probabilité de $p(B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}=0,1$.

Exercice 2

1. Résolution de l'équation $z^2+6\sqrt{3}\,z+36=0$:

Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=\left(6\sqrt{3}\right)^2-4\times36=108-144=-36<0$, $\Delta=36i^2$ et on a $\sqrt{\Delta}=\sqrt{36i^2}=6i$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1=\frac{-6\sqrt{3}-i\sqrt{36}}{2}=\frac{-6\sqrt{3}-6i}{2}=-3\sqrt{3}-3i$, De même : $z_2=-3\sqrt{3}+3i$

L'ensemble des solutions est donc : $S=\left\{-3\sqrt{3}-3i;-3\sqrt{3}+3i\right\}$

2. a) Calcul du module et d'un argument de $z_A=-3\sqrt{3}+3i$:

$|z_A| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$

Soit θ_A un argument de z_A ; θ_A est tel que : $\begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{a}{|z_A|} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{b}{|z_A|} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc : $\theta_A = \arg z_A = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$,

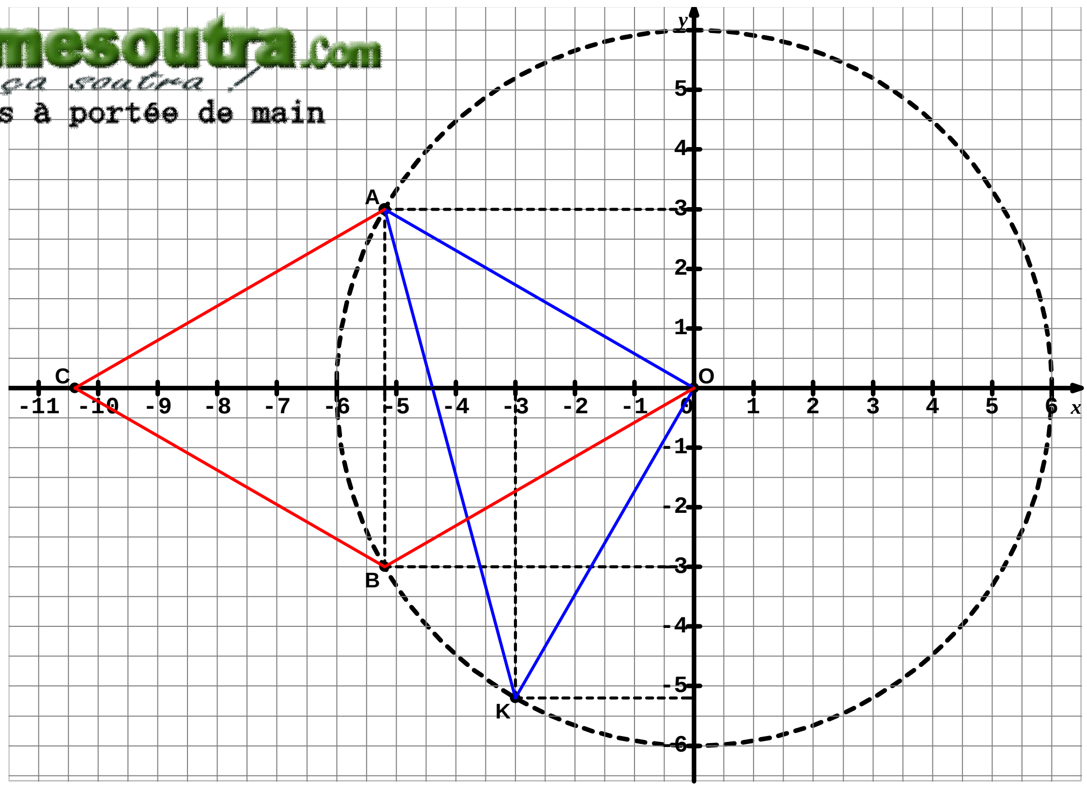
où k est un entier relatif.

Calcul du module et d'un argument de $z_B = -3\sqrt{3} - 3i$: $z_B = \overline{z_A}$, donc $|z_B| = |\overline{z_A}| = 6$

et $\theta_B = \arg \overline{z_A} = -\arg z_A = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

2. b) On en déduit la forme exponentielle de $z_A = -3\sqrt{3} + 3i$: $z_A = 6\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 6e^{5\pi i/6}$

2. c) Pour placer les points A et B avec précision, étant donné que OA = OB = 6, on peut les placer sur le cercle de centre O et de rayon 6, en utilisant leurs ordonnées qui sont entières.



3. a) Calcul des longueurs AC et BC :

on calcule d'abord l'affixe du chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$,

en effet : $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -6\sqrt{3} - \left(-3\sqrt{3} + 3i\right) = -3\sqrt{3} - 3i$ et

$$AC == \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6\,cm$$

de même $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -3\sqrt{3} - 3i - \left(-3\sqrt{3} + 3i\right) = 6i$ et $AB = \sqrt{36} = 6\,cm$.

$z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = -6\sqrt{3} - \left(-3\sqrt{3} - 3i\right) = -3\sqrt{3} + 3i$ et $BC == \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6\,cm$

On a AC = AC donc le triangle ABC est isocèle en A.

De plus : AB = AC = BC donc le triangle ABC est équilatéral.

3. b) On a AC = BC = OA = OB (= 6) donc OACD est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur, c'est donc un losange.

4. a) Voir figure : Comme $z_K = iz_A$,

$z_K = i\left(-3\sqrt{3}+3i\right) = -3 - 3\sqrt{3}i$ $OK = \sqrt{(-3)^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6\,cm$

$$\begin{cases} \cos\theta_K = \dfrac{a}{|z_A|} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_K = \dfrac{b}{|z_A|} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \theta_K = \arg z_K = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } z_K = 6e^{4\pi i/3}$$

on a donc $|z_K| = |iz_A| = |i||z_A| = 1\times 6 = 6 = OK$,donc $OA = OK = 6\,cm$ .OAK est donc un triangle isocèle en O, de plus K appartient au cercle de centre O et de rayon OA.

Calculons AK : $z_{\overline{AK}} = z_K - z_A = -3 - 3\sqrt{3}i - \left(-3\sqrt{3}+3i\right) = \left(3\sqrt{3}-3\right) - \left(3\sqrt{3}+3\right)i$

$AK == \sqrt{\left(3\sqrt{3}-3\right)^2 + \left(3\sqrt{3}+3\right)^2} = \sqrt{27+9-18\sqrt{3}+27+9+18\sqrt{3}} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\,cm$.

On constate que $OA^2 + OK^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$ et $AK^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$, donc on a : $OA^2 + OK^2 = AK^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle OAK est aussi rectangle en O

<u>Correction de problème</u>

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(x+3) - 1$

1) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$g(x) = x\,e^x + 3e^x - 1$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(3e^x - 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x - 1 = 0 - 1 = -1$

alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$. On déduit que la droite d'équation : $y = -1$ est une asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de $-\infty$.

2) $g'(x) = e^x(x+3) + e^x$; $g'(x) = e^x(x+3+1)$; $g'(x) = e^x(x+4)$. $g'(x)$ est du signe de $x+4$ car $e^x > 0$, on en déduit que : g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;4]$ et g est strictement croissante sur $[4\,;+\infty[$.

Il en résulte le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-4		0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		
$g(x)$	-1	↘	$-e^{-4}-1$	↗	2	$+\infty$

3) Comme la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]-4\,;0[$ et que $g(-4)$ et $g(0)$ sont de signes contraires alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]-4\,;0[$

($g(-4) = -e^{-4} - 1 < 0$ et $g(0) = e^0(0+3) - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$)

4) On en déduit des questions précédentes que : $g(x) \le 0$ si et seulement si $x \le \alpha$ et $g(x) \ge 0$ ssi $x \ge \alpha$

<u>Partie B : Etude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative</u>.

Soit *f* la fonction définie par $f(x) = -x + (x+2)e^x$

1) a) $f(x) = -x + xe^x + 2e^x$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2e^{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x+2 \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = +\infty+0 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x)-(-x) = (x+2)e^{x} = xe^{x}+2e^{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right) = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right) = 0$ alors la droite (D) d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $-\infty$

c) Les positions relatives de (D) et (C_f) sont données par le signe de $(x+2)$ car $e^{x}>0$.On en déduit que :
(C_f) est au-dessous de (D) sur l'intervalle $]-\infty\,;-2]$ et (C_f) est au-dessus de (D) sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$.

2) $f(x) = e^{x}\left(-\dfrac{x}{e^{x}}+(x+2)\right)$ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{e^{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{e^{x}}+(x+2)\right) = +\infty$ .On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) $f'(x) = -1+e^{x}+(x+2)e^{x} = -1+(x+3)e^{x}$ d'où $f'(x) = g(x)$.

4) Il en résulte le tableau de variation de f :

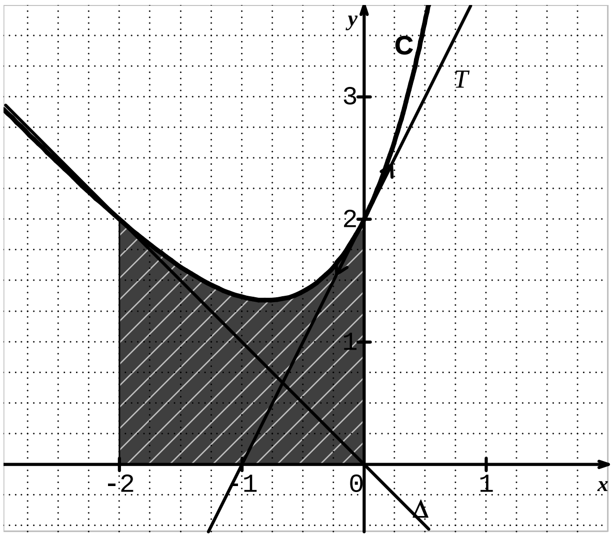
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) L'équation de la tangente (T) à (C_f) en son point A d'abscisse 0 est : $y-f(0) = f'(0)x$ avec $f(0)=2$ et $f'(0)=2$ .D'où : $y=2x+2$

6) A l'aide d'une calculatrice on obtient : $\alpha = -0,79$ à 10^{-2} près par défaut et $f(\alpha) = 1,34$ à 10^{-2} près par excès.

7) Voir courbe

Partie C : Calcul d'une aire.



1) $H(x) = (x+1)e^{x}$. $H'(x) = e^{x}+(x+2)e^{x} = (x+3)e^{x}$.
On en déduit une primitive F de f

$$F(x) = -\frac{x^{2}}{2}+(x+1)e^{x}$$

2) $$A = \int_{-2}^{0} f(x)dx = [F(x)]_{-2}^{0} = \left[-\frac{x^{2}}{2}+(x+1)e^{x}\right]_{-2}^{0}$$

$A = 1-(-2-e^{-2}) = 3+e^{-2}$ unités d'aire.

On a donc

$A = \left(3+e^{-2}\right)\times 6\,\text{cm}^2$ soit $A = \left(18+6e^{-2}\right)\text{cm}^2$

C'est-à-dire 18,81 cm² à 10^{-2} près par défaut