Devoir Surveillé n°15 de Mathématiques Terminale D

Exercice 1 : 5 points

Une personne a 5 jetons indiscernables au toucher dans sa poche : un jeton d'une valeur de 2 €, deux jetons d'une valeur de 1€ chacun et deux jetons d'une valeur de 0,50 € chacun.

Partie I

Cette personne choisit au hasard, *successivement et sans remise*, deux jetons dans sa poche.
On s'intéresse à la somme *S* des valeurs des deux jetons choisis.

1. Construire un arbre ou un tableau décrivant cette expérience.
   En déduire les valeurs possibles de la somme *S*.
2. Soit A l'évènement : « la somme *S* est égale à 1,5 »
   B l'évènement : « la somme *S* est égale à 1 ».
   a. Vérifier que la probabilité de l'évènement A est égale à 0, 4.
   b. Déterminer la probabilité de l'évènement B.
3. Déterminer la probabilité pour que la somme *S* soit supérieure ou égale à 2.

Partie II

Cette personne introduit les deux jetons choisis dans un appareil de stationnement.

Le coût est de 0,50 € pour une heure de stationnement. Soit *X* la variable aléatoire qui à chaque choix de deux jetons associe la durée maximale de stationnement autorisé, exprimée en heures.

1. Déterminer, en utilisant la partie I, la probabilité pour que *X* prenne la valeur 3.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire *X*.

3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire *X*.

Exercice1 (***5 points***)

La plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$l'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et l'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation : $z^2 + 6\sqrt{3}z + 36 = 0$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -3\sqrt{3} + 3i \; ; \; z_B = -3\sqrt{3} - 3i \quad \text{et} \quad z_C = -6\sqrt{3}$$

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

b. Ecrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif

et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c. Placer les points A, B, C dans le plan muni du repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

3.

a. Déterminer la nature du triangle ABC.

b. En déduire que le quadrilatère OACB est un losange.

4. On appelle K le point du plan complexe tel que $z_K = i \times z_A$

a. Donner la forme algébrique , puis la forme exponentielle de z_K

b. Démontrer que le triangle OAK soit rectangle et isocèle en O.

c. Construire le point K sur la figure.

<u>Problème 10 points</u>

<u>Partie A</u> : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+3)e^x - 1$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g en $-\infty$.

2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g.

En déduire le tableau de variation de g.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle $]-4\,;0\,[$.

4. Déduire des questions précédentes le signe de g(x) en fonction des valeurs de x.

Partie B: **Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative**

Soit f la définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{x} - x$

On note ($\mathcal{C}_f$) la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$

(Unités graphiques : 4cm sur l'axe des abscisses et 2cm sur l'axe des ordonnées).

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote la courbe ($\mathcal{C}_f$) en $-\infty$.

c. Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (Δ) et ($\mathcal{C}_f$)

2. En remarquant que *f(x)* peut s'écrire $f(x) = e^{x}\left(x + 2 - \frac{x}{e^{x}}\right)$. déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Vérifier que pour tout réel, on a $f'(x) = g(x)$

4. Dresser le tableau de variation de f .

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ en son point A d'abscisse 0.

6. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

7. Tracer, dans le repère $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$,la courbe $(\mathcal{C}_f)$la tangente (T)et l'asymptote (Δ).
(Utiliser la feuille de papier millimétré fournie)

Partie C.

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (x+1)e^{x}$.

Calculer $H'(x)$ puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$

2. Calculer en cm² , l'aire A comprise entre la courbe ($\mathcal{C}_f$), l'axe des abscisses , la droite

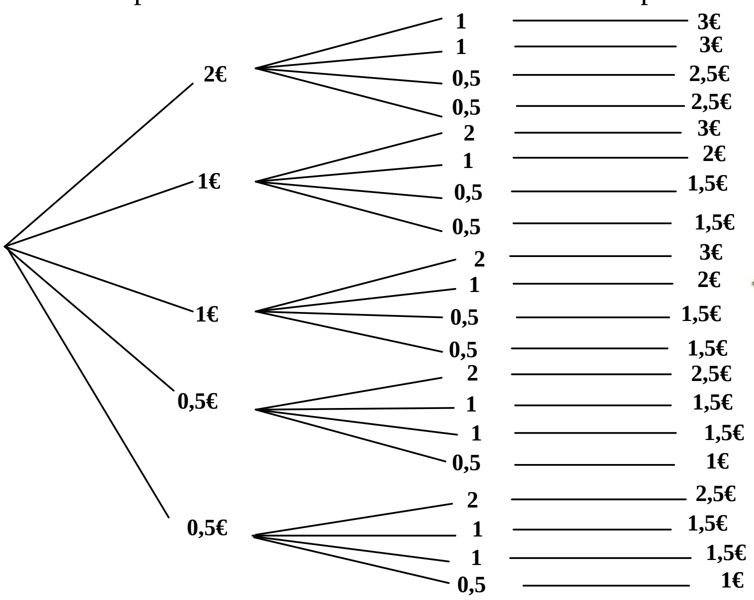
l'équation $x = -2$ et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction

Exercice 1

Partie 1

1. Arbre décrivant l'expérience aléatoire et donnant les valeurs possibles pour la somme S :



On dénombre 20 tirages possibles. Valeurs possibles pour S : {1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3}

2. a) Sur les 20 tirages possibles, il y en a 8 pour lesquels la somme est égale à 1,5 Euros, donc :

$p(A)=\frac{8}{20}=0,4$.

2. b) Pour que la somme soit égale à 1 il faut : tirer un jeton de 0,50€ puis un jeton de 0,50 €

Sur les 20 tirages possibles, il y a 2 tirages favorables pour lesquels la somme est égale à 1 Euro,

Soit une probabilité de $p(B)=\frac{2}{20}=0,1$.

3. Comme les valeurs possibles de la somme S sont 1 ;1,50 ; 2 ; 2,50 et 3

$p(S\geq 2)=p(S=2)+p(S=2,50)+p(S=3)$ ou encore $p(S\geq 2)=1-p(S=1)-p(S=1,50)$

Or $p(S=1,5)=p(A)=0,4$ et $p(S=1)=p(B)=0,1$, donc $p(S\geq 2)=1-0,1-0,4=0,5$.

Partie II

1. comme 1 heure de stationnement coûte 0,50 € , 3h coûtent 1,5 € on a donc

$p(X=3)=p(S=1,5)=0,4$ et $p(X=1)=p(S=2)=0,1$

La durée de stationnement est de 3 heures lorsque la somme introduite est de 1,5 € :

$p(X=3)=p(S=1,5)=0,4$

2. Le temps de stationnement est égal au double de la somme introduite.

$p(X=2)=p(S=1)=\frac{2}{20}=0,1$; $p(X=4)=p(S=2)=\frac{2}{20}=0,1$; $p(X=3)=p(S=1,5)=0,4$

$p(X=5)=p(S=2,5)=\frac{4}{20}=0,2$; $p(X=6)=p(S=3)=\frac{4}{20}=0,2$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est définie par le tableau ci-dessous :

s_i	1 €	1,50 €	2 €	2,5 €	3

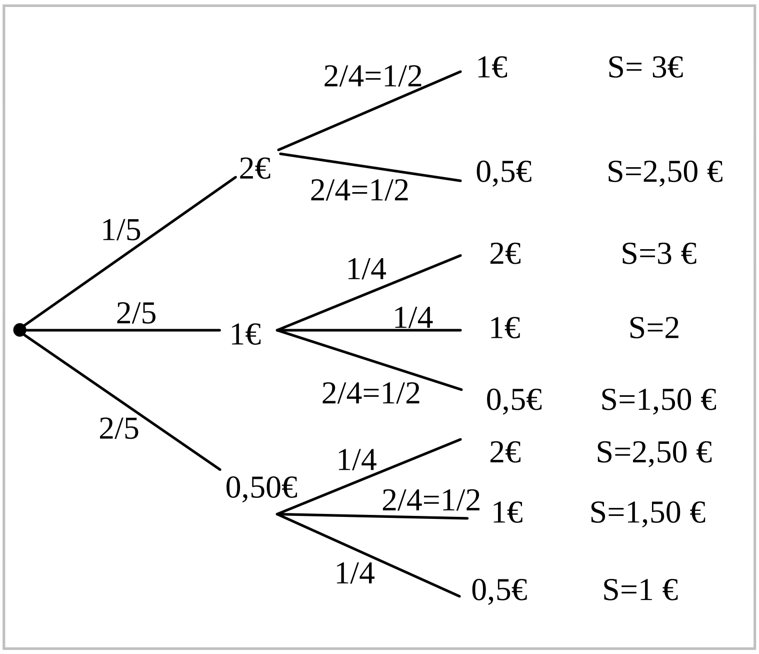
x_i	2	3	4	5	6
$p\left(X = x_i\right)$	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2

3. Calcul de l'espérance mathématique de X :

$$E(X = x_i) = \sum p(X = x_i)x_i = 0,1\times 2 + 0,4\times 3 + 0,1\times 4 + 0,2\times 5 + 0,2\times 6 = 3,9$$

	0,5	0,5	1	1	2
0,5	$S=1$	$S=1$	$S=1,5$	$S=1,5$	$S=2,5$
0,5	$S=1$	$S=1$	$S=1,5$	$S=1,5$	$S=2,5$
1	$S=1,5$	$S=1,5$	$S=2$	$S=2$	$S=3$
1	$S=1,5$	$S=1,5$	$S=2$	$S=2$	$S=3$
2	$S=2,5$	$S=2,5$	$S=3$	$S=3$	$S=4$

Puisque on effectue de tirage sans remise, on élimine la somme sur la diagonale.
Un autre arbre utilisant la probabilité conditionnelle



$p(X=2) = p(S=1) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{2}{20} = 0,1$; $p(X=3) = p(S=1,5) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{4}{10} = 0,4$

$p(X=4) = p(S=2) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{2}{20} = 0,1$

$p(X=5) = p(S=2,5) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{2}{10} = 0,2$; $p(X=6) = p(S=3) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{2}{10} = 0,2$

Autre méthode : Pour que la somme soit égale à 1,50 € il faut :

Soit tirer un jeton de 1€ puis un jeton de 0,50 € , soit une probabilité de $p_1 = \frac{2}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{10} = 0,2$.

Soit tirer un jeton de 0,50 € puis un jeton de 1 € , soit une probabilité de $p_2 = \frac{2}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{10} = 0,2$.

Donc $p(A) = \frac{8}{20} = 0,4$.

Pour que la somme soit égale à 1 il faut : tirer un jeton de 0,50€ puis un jeton de 0,50 €

Soit une probabilité de $p(B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}=0{,}1$.

Exercice 2

1. Résolution de l'équation $z^2+6\sqrt{3}\,z+36=0$:

Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=\left(6\sqrt{3}\right)^2-4\times36=108-144=-36<0$, $\Delta=36i^2$ et on a $\sqrt{\Delta}=\sqrt{36i^2}=6i$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1=\frac{-6\sqrt{3}-i\sqrt{36}}{2}=\frac{-6\sqrt{3}-6i}{2}=-3\sqrt{3}-3i$, De même : $z_2=-3\sqrt{3}+3i$

L'ensemble des solutions est donc : $S=\left\{-3\sqrt{3}-3i;-3\sqrt{3}+3i\right\}$

2. a) Calcul du module et d'un argument de $z_A=-3\sqrt{3}+3i$:

$|z_A|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6$

Soit θ_A un argument de z_A ; θ_A est tel que : $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{a}{|z_A|}=\frac{-3\sqrt{3}}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_A=\frac{b}{|z_A|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\end{cases}$ donc : $\theta_A=\arg z_A=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$,

où k est un entier relatif.

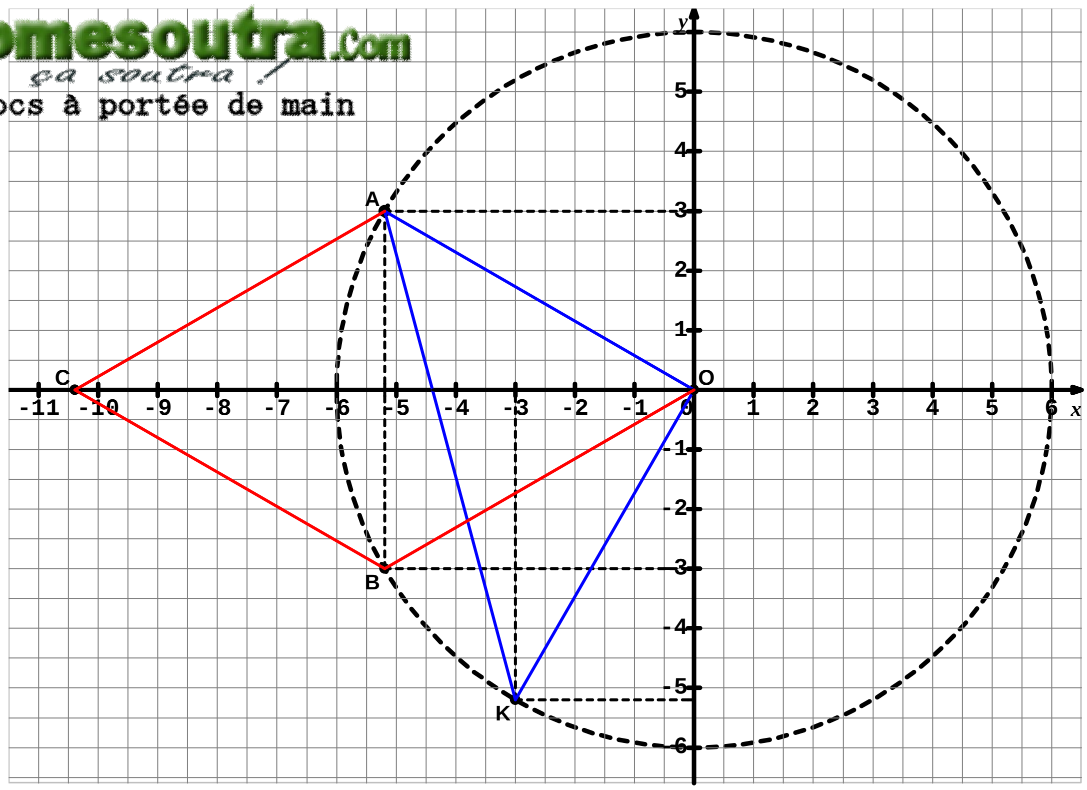
Calcul du module et d'un argument de $z_B=-3\sqrt{3}-3i$: $z_B=\overline{z_A}$, donc $|z_B|=\left|\overline{z_A}\right|=6$

et $\theta_B=\arg\overline{z_A}=-\arg z_A=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

2. b) On en déduit la forme exponentielle de $z_A=-3\sqrt{3}+3i$: $z_A=6\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=6e^{5\pi i/6}$

2. c) Pour placer les points A et B avec précision, étant donné que OA = OB = 6, on peut les placer sur

le cercle de centre O et de rayon 6, en utilisant leurs ordonnées qui sont entières.



3. a) Calcul des longueurs AC et BC :

on calcule d'abord l'affixe du chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$,

en effet : $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -6\sqrt{3} - \left(-3\sqrt{3} + 3i\right) = -3\sqrt{3} - 3i$ et

$$AC == \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6\,cm$$

de même $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -3\sqrt{3} - 3i - \left(-3\sqrt{3} + 3i\right) = 6i$ et $AB = \sqrt{36} = 6\,cm$.

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = -6\sqrt{3} - \left(-3\sqrt{3} - 3i\right) = -3\sqrt{3} + 3i$ et $BC == \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6\,cm$

On a AC = AC donc le triangle ABC est isocèle en A.

De plus : AB = AC = BC donc le triangle ABC est équilatéral.

3. b) On a AC = BC = OA = OB (= 6) donc OACD est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur, c'est donc un losange.

4. a) Voir figure : Comme $z_K = iz_A$,

$z_K = i\left(-3\sqrt{3} + 3i\right) = -3 - 3\sqrt{3}i$ $OK = \sqrt{(-3)^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6\,cm$

$$\begin{cases} \cos\theta_K = \dfrac{a}{|z_A|} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_K = \dfrac{b}{|z_A|} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \theta_K = \arg z_K = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } z_K = 6e^{4\pi i/3}$$

on a donc $|z_K| = |iz_A| = |i||z_A| = 1 \times 6 = 6 = OK$,donc $OA = OK = 6\,cm$ .OAK est donc un triangle isocèle en O, de plus K appartient au cercle de centre O et de rayon OA.

Calculons AK : $z_{\overline{AK}} = z_K - z_A = -3-3\sqrt{3}i - \left(-3\sqrt{3}+3i\right) = \left(3\sqrt{3}-3\right) - \left(3\sqrt{3}+3\right)i$

$$AK == \sqrt{\left(3\sqrt{3}-3\right)^2 + \left(3\sqrt{3}+3\right)^2} = \sqrt{27+9-18\sqrt{3}+27+9+18\sqrt{3}} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\,cm.$$

On constate que $OA^2 + OK^2 = 6^2 + 6^2 = 36+36 = 72$ et $AK^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$, donc on a : $OA^2+OK^2=AK^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle OAK est aussi rectangle en O

<u>Correction de problème</u>

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(x+3)-1$

1) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$g(x) = x\,e^x + 3e^x - 1$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(3e^x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x - 1 = 0-1 = -1$

alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$. On déduit que la droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de $-\infty$.

2) $g'(x) = e^x(x+3)+e^x$; $g'(x) = e^x(x+3+1)$; $g'(x) = e^x(x+4)$. $g'(x)$ est du signe de $x+4$ car $e^x > 0$, on en déduit que : g est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;4\right]$ et g est strictement croissante sur $\left[4\,;+\infty\right[$.

Il en résulte le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	+			
$g(x)$	-1	↘	$-e^{-4}-1$	↗	2	↗	$+\infty$

3) Comme la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-4\,;0\right[$ et que $g(-4)$ et $g(0)$ sont de signes contraires alors l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $\left]-4\,;0\right[$

($g(-4) = -e^{-4}-1 < 0$ et $g(0) = e^0(0+3)-1 = 3-1 = 2 > 0$)

4) On en déduit des questions précédentes que : $g(x)\le 0$ si et seulement si $x\le\alpha$ et $g(x)\ge 0$ ssi $x\ge\alpha$

<u>Partie B : Etude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative</u>.

Soit *f* la fonction définie par $f(x) = -x+(x+2)e^x$

1) a) $f(x) = -x+xe^x+2e^x$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2e^x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x+2\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty+0 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x)-(-x) = (x+2)e^x = xe^x+2e^x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right) = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x)\right) = 0$ alors la droite (D) d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $-\infty$

c) Les positions relatives de (D) et (C_f) sont données par le signe de $(x+2)$ car $e^x>0$.On en déduit que : (C_f) est au-dessous de (D) sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-2\right]$ et (C_f) est au-dessus de (D) sur l'intervalle $\left[-2\,;+\infty\right[$.

2) $f(x) = e^x\left(-\dfrac{x}{e^x}+(x+2)\right)$ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$

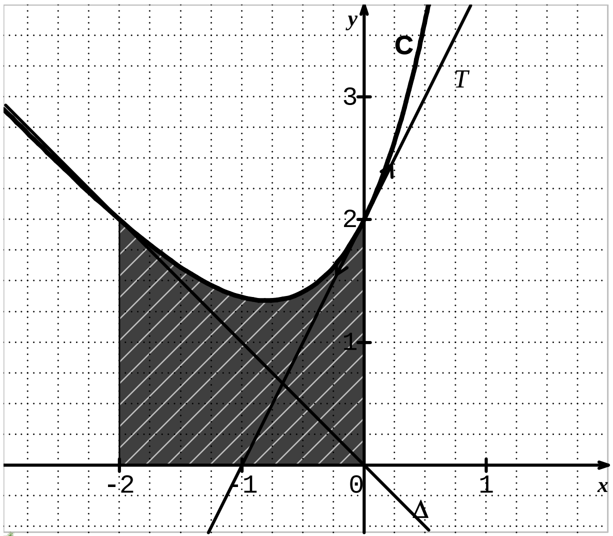
alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{e^x}+(x+2)\right) = +\infty$ .On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) $f'(x) = -1+e^x+(x+2)e^x = -1+(x+3)e^x$ d'où $f'(x) = g(x)$.

4) Il en résulte le tableau de variation de *f* :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5) L'équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}_f$) en son point A d'abscisse 0 est : $y - f(0) = f'(0)x$
avec $f(0) = 2$ et $f'(0) = 2$ .D'où : $y = 2x + 2$
6) A l'aide d'une calculatrice on obtient : $\alpha = -0,79$ à 10^{-2} près par défaut et $f(\alpha) = 1,34$ à 10^{-2} près par excès.
7) Voir courbe
Partie C : Calcul d'une aire.



1) $H(x) = (x+1)e^{x}$. $H'(x) = e^{x} + (x+2)e^{x} = (x+3)e^{x}$.
On en déduit une primitive F de f

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + (x+1)e^{x}$$

2) $$A = \int_{-2}^{0} f(x)dx = [F(x)]_{-2}^{0} = \left[-\frac{x^2}{2} + (x+1)e^{x}\right]_{-2}^{0}$$

$A = 1 - (-2 - e^{-2}) = 3 + e^{-2}$ unités d'aire.
On a donc
$A = \left(3 + e^{-2}\right) \times 6\,\text{cm}^2$ soit $A = \left(18 + 6e^{-2}\right)\text{cm}^2$
C'est-à-dire 18,81 cm² à 10^{-2} près par défaut