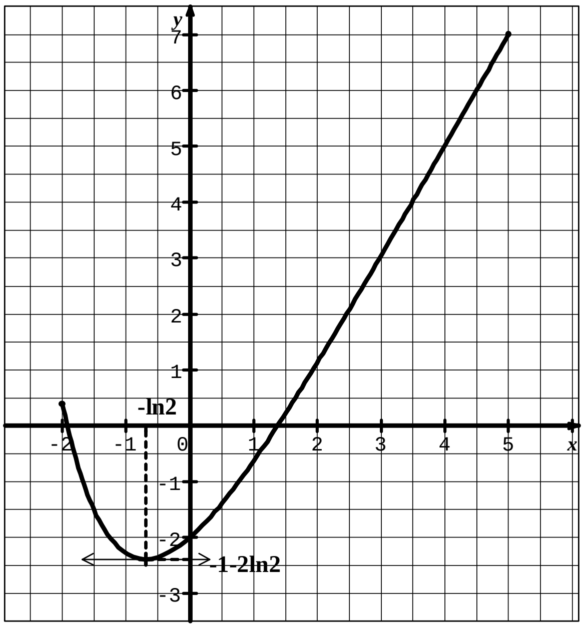
DS10 mathématiques TERM-D 2008-2009

Exercice 1

On donne ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $[-2;5]$.La tangente à (C) au point d'abscisse $-\ln 2$ est parallèle à l'axe des abscisses et (D) est la droite d'équation $y = 2x - 3$.



Partie A

1. Par lecture graphique, déterminer $f(0)$, $f'(-\ln 2)$.
2. a. Déterminer graphiquement le nombre de solutions, sur l'intervalle $[-2;5]$, de l'équation $f(x) = 0$.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) < 0$.

Partie B

La fonction de la partie A est définie sur $[-2;5]$

par : $f(x) = 2x - 3 + e^{-x}$.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout x de $[-2;5]$, $f'(x) = 2 - e^{-x}$.
2. a. Résoudre algébriquement l'équation $f'(x) = 0$.

   b. Donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[-2;5]$.

   c. En déduire le tableau de variations de f.
3. On rappelle que (D) est la droite d'équation $y = 2x - 3$.

   a. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2x - 3$.

   b. Interpréter graphiquement, à l'aide de (C) et (D), le résultat précédent.

Corrections

Exercice 1

Partie I

1. a. On lit $f(0) = -2$.

Rappelons que par définition, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Ici, la tangente au point d'abscisse $-\ln 2$ est par hypothèse parallèle à l'axe des abscisses, donc de coefficient directeur nul : $f'(-\ln 2) = 0$.

b. La courbe intercepte deux fois l'axe des abscisses, l'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions.

c. Graphiquement, $f'(x) < 0$ quand la courbe est décroissante donc $S =]-2; -\ln 2[$.

Partie II

On admet ici que $f(x) = 2x - 3 + e^{-x}$.

1. Puisque $(e^{-x})' = -e^{-x}$, on a : $2 - e^{-x}$.

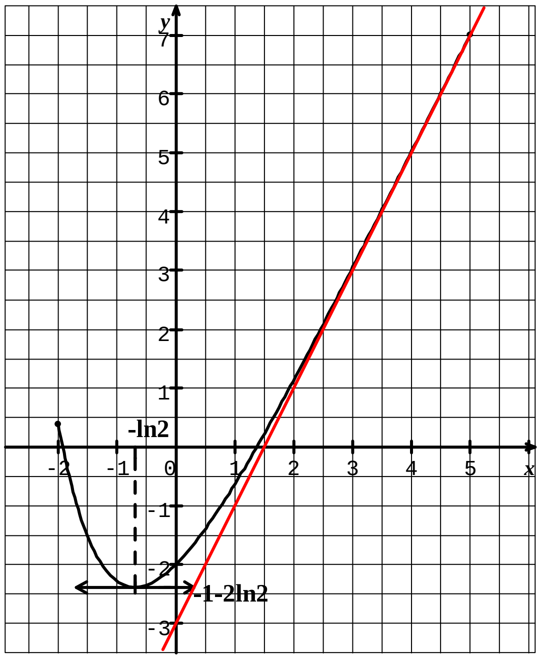
2. a. Par conséquent, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2 = e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2 = \ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2 = -x \Leftrightarrow x = -\ln 2$

ce qui est cohérent avec le graphique puisque c'est seulement au point d'abscisse – ln2 qu'il y a un *tangente horizontale.*

b. On a $f'(x)<0 \Leftrightarrow 2-e^{-x}<0 \Leftrightarrow 2<e^{-x} \Leftrightarrow$ $\ln 2<\ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2<-x \Leftrightarrow x>-\ln 2$ *qui est cohérent avec le* Ic. De même, $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2-e^{-x}>0 \Leftrightarrow$ $2>e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2>\ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2>-x \Leftrightarrow x<-\ln 2$.

c. On en déduit le signe de la dérivée donc les variations de la fonction :

x	-2		$-\ln 2$		5
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	e^2-7	$\searrow$	$-1-2\ln 2$	$\nearrow$	$7+e^{-5}$



3. a. On a $f(x)>2x-3 \Leftrightarrow 2x-3+e^{-x}>2x-3 \Leftrightarrow e^{-x}>0$: or une exponentielle est toujours positive donc cette inéquation est toujours vraie.
Ainsi, $f(x)>2x-3$ pour tout x de [-2 ;5].

b. Résoudre l'inéquation $f(x)>2x-3$ revient à étudier les positions des courbes C et D ,par conséquent, la courbe C est toujours strictement au dessus de la droite D.