DS n°2 MATHEMATIQUES TERMINALE 2008-2009

Exercice 9 points

On considère, les nombres complexes $z_A = 4e^{i\pi/6}$; $z_B = 4e^{-2i\pi/3}$ et , $z_C = -2+2i$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal. *Les parties* **I , II et III** *sont indépendantes*

***Partie* I : Q. C.M.**

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C ou Dest exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

On ne demande aucune justification

NOTATION : *chaque réponse juste rapporte* 0,5 *point ; une réponse fausse enlève* 0,25 *point.*
Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, il est ramené à 0.

1. Le nombre complexe $Z_1 = z_A \times z_B$ est :

Réponse A : un nombre réel positif
Réponse B : un nombre réel négatif
Réponse C : un nombre imaginaire pur
Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

2. Le nombre complexe $Z_2 = z_A^6$ est :

Réponse A : un nombre réel positif
Réponse B : un nombre réel négatif
Réponse C : un nombre imaginaire pur
Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

3. Le nombre complexe conjugué de z_A est :

Réponse A : $-4e^{i\pi/6}$
Réponse B : $4e^{i7\pi/6}$
Réponse C : $4e^{-i\pi/6}$
Réponse D : $\frac{1}{4}e^{-i\pi/6}$

4. Le nombre complexe z_C peut se mettre sous la forme :

Réponse A : $2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$
Réponse B : $2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$
Réponse C : $2\sqrt{2}e^{5i\pi/4}$
Réponse D : $4e^{3i\pi/4}$

***Partie* II**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

1. Soit *M* un point du plan d'affixe *z*.

a. Interpréter géométriquement $|z - z_A|$.

b. Quel est l'ensemble des points *M* du plan dont l'affixe *z* vérifie l'égalité : $|z - z_A| = |z - z_B|$.

c. Vérifier que le point C appartient à l'ensemble D

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

3. Déduire des questions 1. et 2. la nature du triangle ABC.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

***Partie* III**

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}\,i$; $z_2 = 2+2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1. Écrire Z sous forme algébrique .
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z . Donner la forme exponentielle de z_1, z_2 et Z .
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.
   On désigne par M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z .
   Placer le point M_2, puis placer les points M_1 et M_3 en utilisant la règle et le compas
   (on laissera les traits de construction apparents).

Problème 11 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-x^2+3x-6}{x-1}$ et soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ unit´es : 1cm sur l'axe des abscisses ; 2 mm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. a. Calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble.
   b. Déduire de la question précédente une asymptote D à $\mathcal{C}_f$.

3. a. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f
   b. Etudier en détail le signe de la fonction dérivée.
   c. Etablir le tableau de variations de la fonction f

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

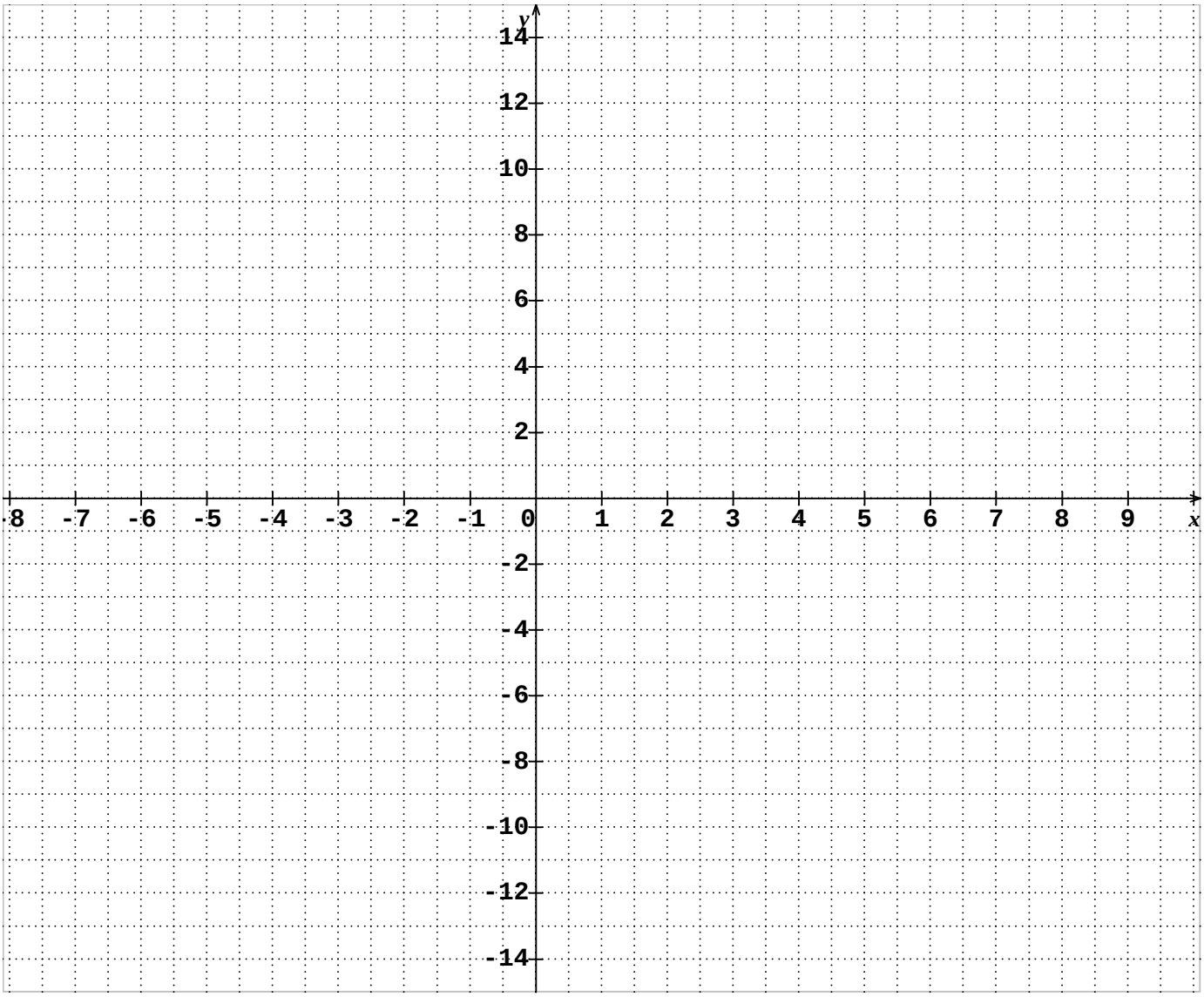
4. a. Déterminer les réels a , b , c tels que $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x-1}$
   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ quand x vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
   c. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (Δ) .

5. a. Déterminer une équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
   b. Déterminer une équation de la tangente T_2 à $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 2.

6. Montrer que le point (1; 1) est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

7. Tracer D, (Δ) , T_1 , T_2 et $\mathcal{C}_f$.

Annexe –problème



EXERCICE

On considère la fonction ¦ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+7x+10}{x+1}$

On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées)

1. Calculer $f(0)$. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

3 Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

4. Étudier les limites de f en -1^+ et en -1^-. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale D dont on précisera l'équation.
5. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ?
6. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D.
7. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe. En déduire le tableau de variation de f.
8. Déterminer une équation des tangentes T_{-2} et T_{-3} aux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives -2 et -3.
9. Tracer, dans le repère, D, Δ, T_{-2} , T_{-3} et $\mathcal{C}_f$. (On se limitera à $[-10;-1[\cup]-1;6]$)

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

EXERCICE

On considère la fonction ¦ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+7x+10}{x+1}$

On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées)

1. Calculer $f(0)$. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

3 Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

4. Étudier les limites de f en -1^+ et en -1^-. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale D dont on précisera l'équation.
5. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ?
6. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 6$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D.
7. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe. En déduire le tableau de variation de f.
8. Déterminer une équation des tangentes T_{-2} et T_{-3} aux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives -2 et -3.
9. Tracer, dans le repère, D, Δ, T_{-2} , T_{-3} et $\mathcal{C}_f$. (On se limitera à $[-10;-1[\cup]-1;6]$)

Correction

Exercice 1

Partie I

On considère, les nombres complexes $z_A = 4e^{i\pi/6}$; $z_B = 4e^{-2i\pi/3}$ et , $z_C = -2+2i$.

1. Le nombre complexe $Z_1 = z_A \times z_B$ est :

$$z_A = 4e^{i\pi/6} \times 4e^{-2i\pi/3} = 16e^{i\pi/6-2i\pi/3} = 16e^{-3i\pi/6} = 16e^{-i\pi/2} = -16i$$

Réponse A : un nombre réel positif

Réponse B : un nombre réel négatif

Réponse C : un nombre imaginaire pur

Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

2. Le nombre complexe $Z_2 = z_A^6$ est : $Z_2 = \left(z_A\right)^6 = \left(4e^{i\pi/6}\right)^6 = \left(4\right)^6 e^{i\pi} = -4^6$

Réponse A : un nombre réel positif

Réponse B : un nombre réel négatif

Réponse C : un nombre imaginaire pur

Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

3. Le nombre complexe conjugué de z_A est : $\overline{z_A} = \overline{4e^{i\pi/6}} = 4e^{-i\pi/6}$

Réponse A : $-4e^{i\pi/6}$

Réponse B : $4e^{i7\pi/6}$

Réponse C : $4e^{-i\pi/6}$

Réponse D : $\frac{1}{4}e^{-i\pi/6}$

4. Le nombre complexe z_C peut se mettre sous la forme :

$$z_C = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(3\pi/4\right)+i\sin\left(3\pi/4\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$$

Réponse A : $2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

Réponse B : $2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$

Réponse C : $2\sqrt{2}e^{5i\pi/4}$

Réponse D : $4e^{3i\pi/4}$

Partie II

1. soit M un point d'affixe z . $z_{\overrightarrow{AM}} = z_M - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$; $\left|z_{\overrightarrow{AM}}\right| = \left|z_M - z_A\right| = AM$

Donc $\left|z_M - z_A\right|$ est égale à la distance AM .

b. $\left|z_M - z_A\right| = \left|z_M - z_B\right| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

l'ensemble D des points M du plan dont l'affixe z vérifie l'égalité : $\left|z_M - z_A\right| = \left|z_M - z_B\right|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

c. $z_A = 4e^{i\pi/6} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}+2i$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$$z_B = 4e^{-2i\pi/3} = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2-2\sqrt{3}i$$

$AC = \left|z_C - z_A\right| = \left|-2+2i-2\sqrt{3}-2i\right| = \left|-2-2\sqrt{3}\right| = 2+2\sqrt{3}$.

$BC = \left|z_C - z_B\right| = \left|-2+2i+2+2\sqrt{3}i\right| = \left|2i+2\sqrt{3}i\right| = 2+2\sqrt{3}$, donc $AC = BC$ .et par conséquent , le point C appartient à l'ensemble D.

3. $AB = \left|z_B - z_C\right| = \left|-2-2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}-2i\right| = \left|-\left(2+2\sqrt{3}\right)-\left(2+2\sqrt{3}\right)i\right|$

$$AB = \sqrt{\left(2+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2\left(2+2\sqrt{3}\right)^2} = \left(2+2\sqrt{3}\right)\sqrt{2}$$

Donc $AC^2+BC^2=\left(2+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)^2=2\left(2+2\sqrt{3}\right)^2=AB^2$,donc $AC^2+BC^2=AB^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore , le triangle ABC est rectangle en C .

3. on a : le triangle ABC est rectangle en C . et AC=BC , donc le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

1. $Z=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{2+2i}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)\left(2-2i\right)}{\left(2+2i\right)\left(2-2i\right)}=\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8}+i\dfrac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. $|z_1|^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2=2+6=8$, $|z_1|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et on a

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$; d'où $\theta=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi/3\right)+i\sin\left(\pi/3\right)\right)=2\sqrt{2}e^{i\pi/3}$

$|z_2|^2=2^2+2^2=4+4=8$; $|z_1|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et on a

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$; $\theta=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$z_2=2+2i=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi/4\right)+i\sin\left(\pi/4\right)\right)=2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

On a donc $|Z|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=1$ et on a : $\arg Z=\arg z_1-\arg z_2=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc $Z=\cos\left(\pi/12\right)+i\sin\left(\pi/12\right)$, donc $\cos\left(\pi/12\right)=\mathrm{Re}(Z)$ et $\sin\left(\pi/12\right)=\mathrm{Im}(Z)$

et on a : $\cos\left(\pi/12\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\pi/12\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Problème

1. $f(x)$ est définie si et seulement si son dénominateur $x-1\neq 0$, ce qui équivaut à $x\neq 1$.

Ainsi $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

2. Partons du membre de droite de l'égalité proposée : pour tout $x\neq 1$, on a :

$ax+b+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}=\dfrac{ax^2(b-a)x+(-b+c)}{x-1}=\dfrac{-x^2+3x-6}{x-1}$, donc

$$\begin{cases}a=-1\\ b-a=3\\ c-b=-6\end{cases}\Leftrightarrow a=-1;b=3+a=3+1=2;c=-6+2=-4.$$ $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-6}{x-1}=-x+2-\dfrac{4}{x-1}$,

3.a. En $-\infty$. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ par somme puis quotient de limites . De même , $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty}-x+2=+\infty$, il s'ensuit alors par somme de limites que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

b. En $+\infty$ (démarche identique)

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ par somme puis quotient de limites .

De même , $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}-x+2=-\infty$, il s'ensuit alors par somme de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

c. En 1 : on a $f(x)=-x+2-\dfrac{4}{x-1}=-x+2-4\times\dfrac{1}{x-1}$ pour tout $x\neq 1$. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}(-x+2)=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}(x-1)=0$.

Or , $x-1<0$ pour tout $x<1$, on en déduit alors par inverse de limites que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\dfrac{1}{(x-1)}=-\infty$ .et

$-4\times\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\dfrac{1}{(x-1)}=+\infty$ On conclut par quotient et somme de limites que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}f(x)=+\infty$

De même , , $x-1>0$ pour tout $x>1$, on en déduit alors par inverse de limites que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{1}{(x-1)}=+\infty$ .et

$-4\times\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{1}{(x-1)}=-\infty$ On conclut par quotient et somme de limites que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}f(x)=-\infty$

b. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}f(x)=+\infty$, on peut affirmer que la droite D d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

4. a. pour tout $x\neq 1$, on a $f(x)-(-x+2)=-\dfrac{4}{x-1}$, or on vient de voir que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ .Par conséquent

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite Δ d'équation $y=-x+2$ pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. pour tout $x\neq 1$, on a $f(x)-(-x+2)=\dfrac{4}{1-x}$ est de même signe que $1-x$, si bien que $f(x)>(-x+2)$ pour $x\in]-\infty;1[$ et que $f(x)<(-x+2)$ pour $x\in]1;+\infty[$.

On conclut que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de D sur $]-\infty;1[$ et en dessous de D sur $]1;+\infty[$

5. Soit $I(x;y)=D\cap\Delta$; alors $x=1$ et $y=-x+2=-1+2=1$ .Par conséquent l'intersection des asymptotes Est le point $I(1;1)$.

Vérifions maintenant que ce point est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ .Comme $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ est symétrique par rapport à 1 il fat et il suffit que : $f(a+h)+f(a-h)=2b$, c'est-à-dire $f(1+h)+f(1-h)=2\times 1=2$. En effet : pour tout $h\neq 0$

$f(1+h)+f(1-h)=-(1+h)+2-\dfrac{4}{1+h-1}-(1-h)+2-\dfrac{4}{1-h-1}=1-h-\dfrac{4}{h}+1+h+\dfrac{4}{h}=2$. Cqfd

Le point d'intersection I est donc centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

6. a . La fonction f étant un polynômes, elle est dérivable sur son domaine de définition.

En utilisant la formule $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{1}{v^2}$ pour v une fonction dérivable ne s'annulant pas,

on obtient pour tout $x\neq 1$: $f'(x)=-1+\dfrac{4}{(x-1)^2}=\dfrac{2^2-(x-1)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{\left[2+(x-1)\right]\left[2-(x-1)\right]}{(x-1)^2}$

Soit pour tout $x\neq 1$ $f'(x)=\dfrac{(x+1)(3-x)}{(x-1)^2}$

b) Dressons le tableau de signe de f' sur D_f

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

c) On en déduit le tableau de variation de f sur D_f

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↗	‖	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$

Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main

Ne pas oublier de placer les limites « aux bouts des flèches »

$f(-1) = -1 + 2 - \frac{4}{-2} = 5$ et $f(3) = -3 + 2 - \frac{4}{2} = -3$

De plus , f 's'annule en -1 et en 3, si bien que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet des tangentes horizontales

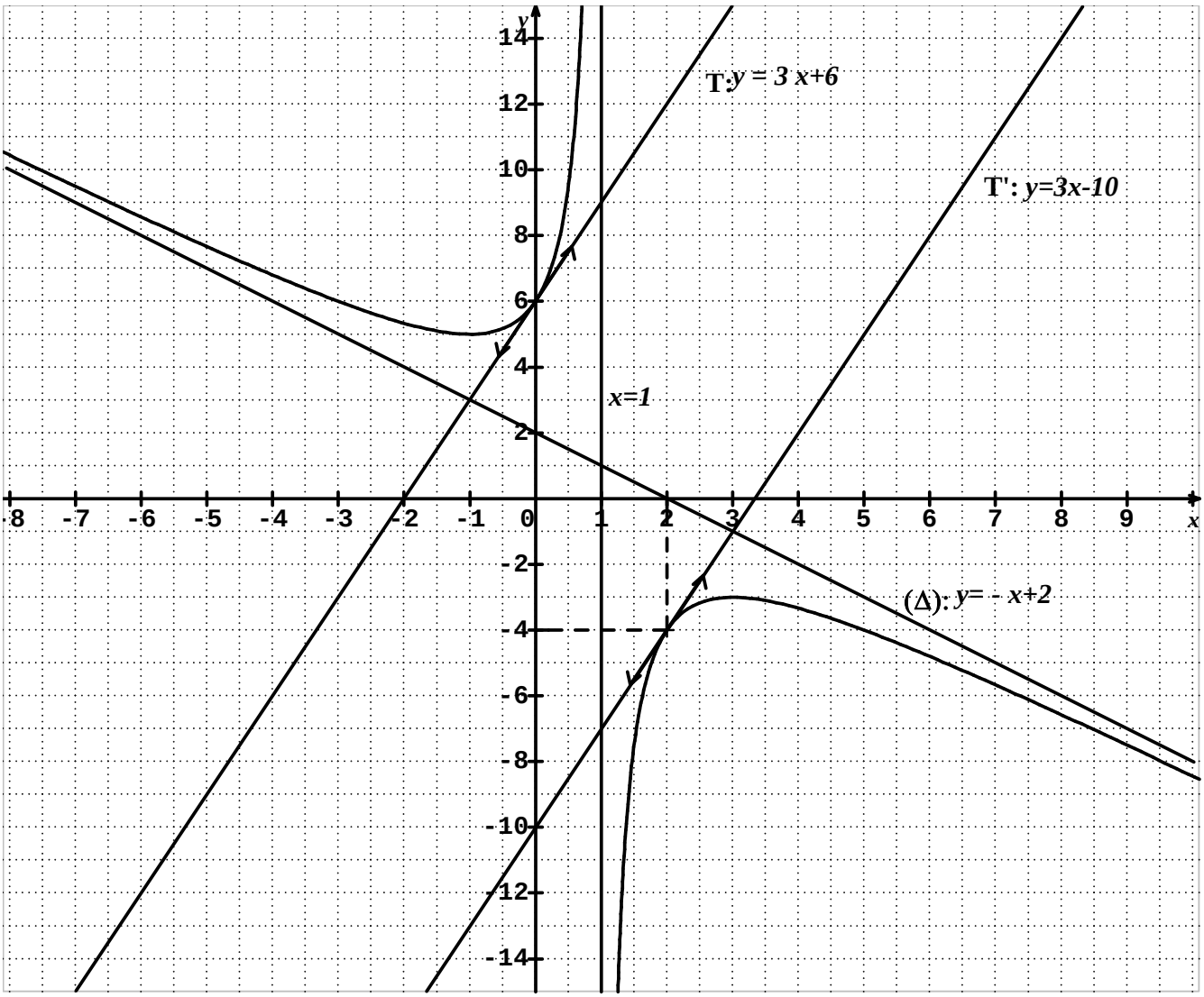
Aux points $A(-1;5)$ et $B(3;-3)$. Elles doivent impérativement apparaître sur le tracé .

7. $f(0) = 6$ et que $f'(0) = 3$, alors la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $C(0;6)$ a pour équation réduite $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 3x + 6$. De même on a : $f(2) = -2 + 2 - \frac{4}{1} = -4$ et que $f'(2) = \frac{(2+1)(3-2)}{(2-1)^2} = 3$,

alors la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $C(2;-4)$ a pour équation réduite

$y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3(x-2) - 4$. Soit $y = 3x - 10$

8. En plaçant les deux asymptotes et les trois tangentes rencontrées en cours d'étude, On peut alors tracer sans aucune difficulté la courbe $\mathcal{C}_f$.



1. $f(0) = 10$. La courbe C_f coupe donc l'axe des ordonnées en $A(0 ; 10)$.

2. Pour déterminer les abscisses des éventuels points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses, on résout l'équation : $f(x) = 0$

   C'est-à-dire : $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 1} = 0$

   Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul. Notre équation est donc équivalente à :

   $$x^2 + 7x + 10 = 0$$

   Ceci est une équation du second degré. Calculons son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 9$.

   On a : $\Delta > 0$. Par conséquent, l'équation admet deux solutions :

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -5 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -2$$

   $$S = \{-5 ; -2\}$$

   La courbe C_f coupe donc l'axe des abscisses en deux points : $B(-5 ; 0)$ et $C(-2 ; 0)$

3. Nous cherchons des réels a, b et c tels que :

   $$\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1} = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

   En réduisant au même dénominateur dans le membre de droite, on obtient :

   $$\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1} = \frac{(ax + b)(x + 1) + c}{x + 1}$$

   Nous pouvons simplifier par $x + 1$ (qui est non nul, puisque $x \neq -1$) :

   $$x^2 + 7x + 10 = (ax + b)(x + 1) + c$$

   Puis, en développant le membre de droite, on obtient :

   $$x^2 + 7x + 10 = a\,x^2 + ax + bx + b + c$$

   Regroupons les termes en x dans le membre de droite :

   $$x^2 + 7x + 10 = a\,x^2 + (a + b)x + b + c$$

   Or, deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si les coefficients de leurs monômes respectifs sont égaux, d'où : $a = 1 \ ; \ a + b = 7 \ ; \ b + c = 10$

   On en déduit : $a = 1 \ ; \ b = 6 \ ; \ c = 4$

   Nous avons donc une nouvelle écriture de $f(x)$, à savoir :

   $$f(x) = x + 6 + \frac{4}{x + 1}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

4. Utilisons l'écriture obtenue dans la question 3.

   Limite de f en -1^+. On a :

   $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1} (x + 6) = 5 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{4}{x + 1} = +\infty \quad \text{puisque} \quad \lim\limits_{x \to -1^+} (x + 1) = 0^+. \end{cases}$$

   Donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.

Limite de f en -1^-. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1} (x+6) = 5 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{4}{x+1} = -\infty \text{ puisque } \lim\limits_{x\to -1^-} (x+1) = 0^-. \end{cases}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$.

Comme les limites de f en -1^+ et -1^- sont **infinies**, on en déduit que la courbe C_f admet une asymptote verticale D d'équation $x = -1$.

5. Utilisons encore l'écriture obtenue dans la question 3.

Limite de f en $+\infty$. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} (x+6) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0 \text{ puisque } \lim\limits_{x\to +\infty} (x+1) = +\infty. \end{cases}$$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

On peut aussi utiliser la règle suivante : "la limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ (ou $-\infty$) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré". Ce qui permet d'aboutir plus rapidement au résultat.

Limite de f en $-\infty$. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} (x+6) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0 \text{ puisque } \lim\limits_{x\to -\infty} (x+1) = -\infty. \end{cases}$$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Comme les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ **ne sont pas finies**, la courbe C_f n'admet donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$, ni en $-\infty$.

6. Étudions la différence $f(x) - (x+6)$. (C'est "l'écart vertical" entre la courbe C_f et la droite Δ en l'abscisse x).

$$f(x) - (x+6) = x + 6 + \frac{4}{x+1} - (x+6) = \frac{4}{x+1}$$

Cet "écart vertical" tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - (x+6)] = \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

La courbe C_f admet donc une asymptote oblique Δ d'équation $y = x + 6$ en $+\infty$.

On a le même résultat en $-\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} [f(x) - (x+6)] = \lim_{x\to -\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

La courbe C_f admet donc également une asymptote oblique Δ d'équation $y = x + 6$ en $-\infty$.

La position relative de C_f et de Δ est donnée par le **signe** de la différence $f(x) - (x+6) = \dfrac{4}{x+1}$.

Or, $$\frac{4}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

La courbe C_f est donc au dessus de Δ sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ et en dessous de Δ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$.

On peut résumer ces informations dans un tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $f(x)-(x+6)$		$-$	‖	$+$	
position relative de C_f par rapport à Δ.		C_f est en dessous de Δ.	‖	C_f est au dessus de Δ.	

7. La fonction f est du type $\frac{u}{v}$ où u et v sont les fonctions définies par $\begin{cases} u(x) = x^2+7x+10 \\ v(x) = x+1 \end{cases}$

La dérivée f' de f est donc égale à : $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. Ce qui donne :

$$f'(x) = \frac{(2x+7)(x+1)-(x^2+7x+10)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+7x+7-x^2-7x-10}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

Factorisons la dérivée afin de pouvoir étudier son signe. Pour cela, on étudie le trinôme x^2+2x-3.

On a $\Delta = 16 > 0$. Le trinôme admet deux racines : $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. Le trinôme se factorise donc ainsi :

$$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$$

Rappel : lorsqu'un trinôme admet deux racines, on a :
$a x^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

La dérivée f' peut donc encore s'écrire :

$$f'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

La fonction $x \mapsto x^2+2x-3$ est représentée par une parabole tournée vers le haut. (Car le coefficient de x^2, à savoir 1, est positif). Une simple esquisse de cette parabole permet alors de justifier directement le signe de la dérivée f'.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
signe de $(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $(x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de la dérivée f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	↗	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	9	↗	$+\infty$

Justification des signes :

$x+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$

$x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

Un carré est positif ou nul

Ne pas oublier de compléter le tableau de variation avec les valeurs des limites et des éventuels extremums.

La fonction f admet un maximum relatif en -3 : $f(-3) = 1$.

La fonction f admet un minimum relatif en 1 : $f(1) = 9$.

8. L'équation de la tangente T_{-2} au point d'abscisse -2 est donnée par la formule :

$$T_{-2} : y = f(-2) + f'(-2)(x+2)$$

La formule générale est :
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

Or, $f(-2) = 0$ et $f'(-2) = -3$.

D'où : $T_{-2} : y = -3x-6$

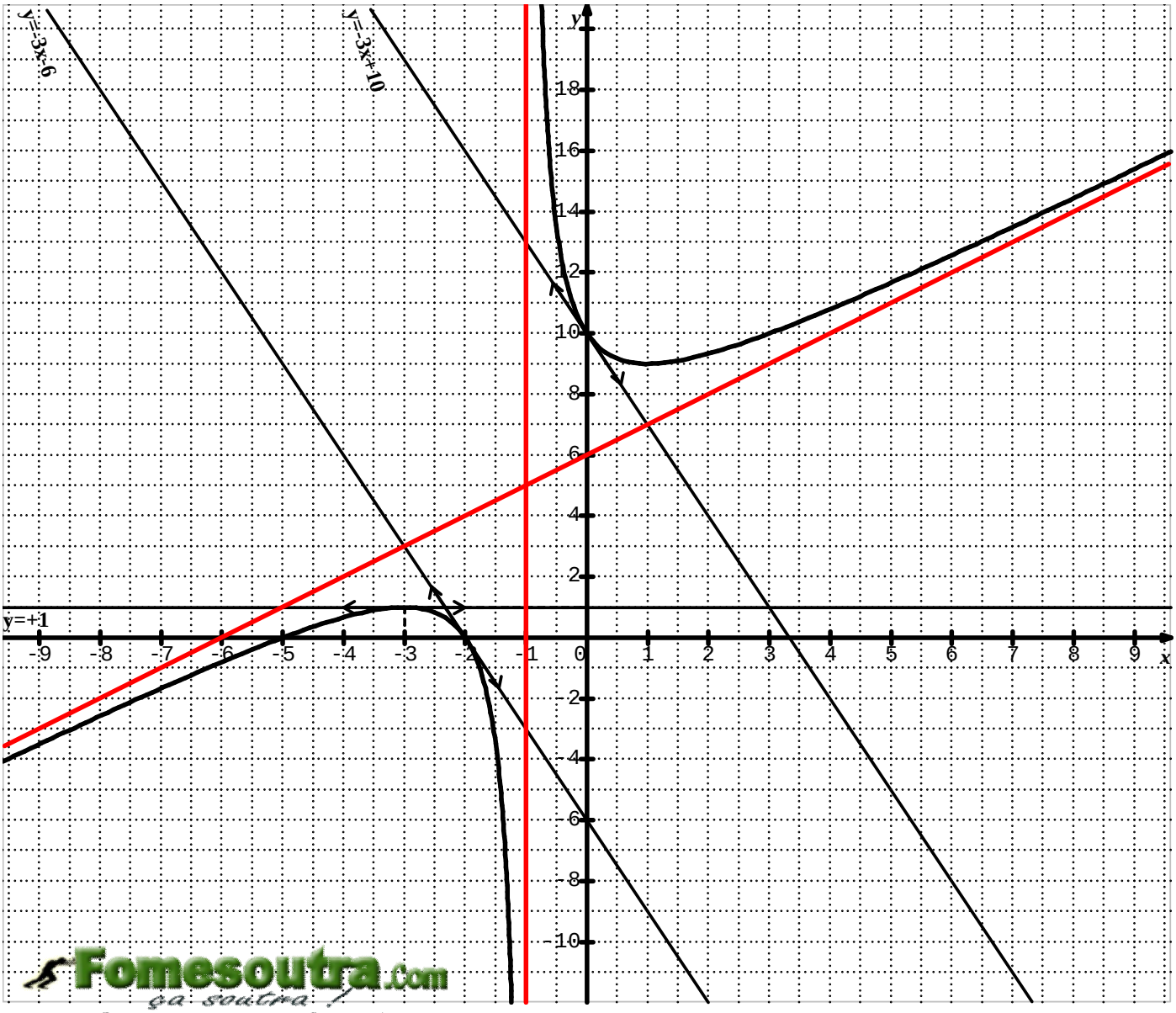
Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

De même, la tangente T_{-3} a pour équation :

$$T_{-3} : y = f(-3) + f'(-3)(x+3)$$

Or, $f(-3) = 1$ et $f'(-3) = 0$.

D'où : $T_{-3} : y = 1$ (tangente horizontale)



Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main