DS N°9 MATHEMATIQUES TERMINALE 2005/2006

Exercice 1-4 points

Une boîte contient 150 boutons de 12 types différents, destinés à la confection de vêtements.
Le tableau suivant donne leur répartition en fonction de leur nombre de trous et de leur diamètre en mm.

1°) On tire au hasard un bouton de la boîte et on admet que ce tirage est effectué en situation d'équiprobabilité.

Diamètre en mm				
Nombre de trous	6	10	14	18
2	21	24	18	0
3	12	15	12	3
4	0	9	27	9

Calculer la probabilité d'obtenir

a) Un bouton à 2 trous
b) Un bouton de 14mm de diamètre
c) Un bouton à 3 trous de 10mm de diamètre
d) Un bouton de diamètre inférieur à 12mm.

2°) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bouton tiré associe son diamètre en mm.

a) Calculer la probabilité de l'évènement (X = 6)

b) Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
d) Calculer à 10^{-2} près l'écart type de la variable aléatoire X.

Exercice 2- 5 points

On considère l'équation différentielle (E) : $4y''+\pi^2 y=0$

1°) Résoudre cette équation différentielle .

2 °) Déterminer la fonction h solution de cette équation différentielle qui satisfait aux conditions suivantes :
Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

✓ la courbe représentative de h passe par le point M de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(cela signifie que $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$).

✓ la tangente à cette courbe en ce point M est parallèle à l'axe des abscisses. (cela signifie que $h'\left(\frac{1}{2}\right)=0$)

3°) Vérifier que , pour tout nombre réel x : $h(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Résoudre sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ l'équation : $h(x)=-\frac{1}{2}$

Problème du bac STI session 2002- 10 points

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=1-2x+e^{2x}$.

1 °) Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminer $g'(x)$. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).

2°) Montrer que g(x) > 0 pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 + x\,e^{-2x}$.

On appelle X sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1°)

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2°)

a) Calculer pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)$ et vérifier que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^{2x}}$.

b) En utilisant la partie A, déterminer le tableau de variations de f.

c) En déduire que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$ on a : $f(x) > 0$.

3°)

a) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à C en $+\infty$.

b) Etudier la position relative de C et Δ.

4°) Tracer C et Δ.

5°) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{-2x}$.

a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Soit l'aire A en cm² de la partie du plan délimitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

c) Déterminer la valeur exacte de A, puis sa valeur arrondie à 0,1 près.

Correction

Ex1

1. a) soit A l'événement « obtenir un bouton à 2 trous » , donc $P(A) = \dfrac{21+24+18}{150} = \dfrac{63}{150} = \dfrac{21}{50} = 0,42$

b) soit B l'événement « obtenir Un bouton de 14mm de diamètre» $P(B) = \dfrac{18+12+27}{150} = \dfrac{57}{150} = \dfrac{19}{50} = 0,38$

c) soit C l'événement « obtenir Un bouton à 3 trous de 10mm de diamètre» $P(C) = \dfrac{15}{150} = \dfrac{1}{10} = 0,1$

d) soit D l'événement « obtenir Un bouton de diamètre inférieur à 12mm »

$P(D) = \dfrac{21+24+12+15+9}{150} = \dfrac{81}{150} = \dfrac{27}{50} = 0,54$

2.

a) $\{X = 6\}$ correspond à l'événement « Un bouton de 6mm de diamètre », donc $P(X = 6) = \dfrac{33}{150} = \dfrac{11}{50} = 0,22$

b) soit X la variable aléatoire qui à chaque bouton tiré associe son diamètre en mm ,donc : $X = \{\,6\,;10\,;14\,;18\,\}$

x_i	6	10	14	18
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{33}{150}=\frac{11}{50}$	$\frac{48}{150}=\frac{8}{25}$	$\frac{57}{150}=\frac{19}{50}$	$\frac{12}{150}=\frac{2}{25}$

$\sum_{i=1}^{i=4} P(X=x_i)=\frac{33}{150}+\frac{48}{150}+\frac{57}{150}+\frac{12}{150}=\frac{33+48+57+12}{150}=\frac{150}{150}=1$, donc X définie bien une loi de probabilité

c) $E(X)=\frac{6\times 33+10\times 48+14\times 57+18\times 12}{150}=\frac{1692}{150}=11,26$

d) $E(X)=\frac{36\times 33+100\times 48+196\times 57+324\times 12}{150}-\left[E(X)\right]^2=\frac{21048}{150}-\left(\frac{1692}{150}\right)^2=140,32-127,24=13,08$

d'où $\sigma_X=\sqrt{13,08}\approx 3,6$ à 10^{-2} près.

Exercice 2-solution

1)Soit l'équation différentielle $4y''+\pi^2 y=0$. L'équation différentielle (E) est de la forme y" + w^2y = 0 avec $w=\frac{\pi}{2}$. ses solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x)$ = A cos wx + B sin wx, donc les solutions de cette équation sont les fonctions : $f(x)=A\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ où A et B sont deux constantes réelles.

2) On a : $g(1/2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $g'(1/2)=0$. g' est de la forme: $g'(x)=\frac{A\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)+\frac{-B\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

on a donc : $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ or $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $A+B=1$

puis : $g'(\frac{1}{2})=\frac{A\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{4})-\frac{B\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}\left(A\sin(\frac{\pi}{4})-B\cos(\frac{\pi}{4})\right)=A-B=0$ donc $A-B=0$.

On a le système $\begin{cases}A+B=1\\A-B=0\end{cases}$ d'où $A=B=\frac{1}{2}$ et donc $g(x)=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)+\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

3) $g(x)=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)+\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)$; $g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)+\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)$

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{2}x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{2}x)$ $\quad g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$

4) $g(x)=-\frac{1}{2}$ on a donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ d'où, avec $k\in\mathbb{Z}$,

$\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ .Donc $x=2+4k$ ou $x=-1+4k$

D'où les solutions possibles : x = 2 et x = –1 .

Problème -solution

Partie A : $g'(x)=-2+2e^{2x}$.. la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a: $g'(x)=-2+2e^{2x}$

$g'(x)=2(e^{2x}-1)$. $g'(x)=0\Leftrightarrow 2(e^{2x}-1)=0\Leftrightarrow e^{2x}-1=0\Leftrightarrow e^{2x}=1\Leftrightarrow 2x=\ln 1=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

La fonction g admet un minimum en x = 0 et vaut g(0) = 1 >0
Donc g(x) > 0 pour tout réel x

Partie B :1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}\times\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2.a. Première méthode : $f(x)=x+2+xe^{-2x}$. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-2x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Seconde méthode: en posant u = 2.x : $f(x) = x+2+xe^{-2x} = \frac{u}{2}+2+\frac{u}{2}e^{-u}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} u = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{u\to-\infty} \frac{u}{2} = -\infty$; $\lim\limits_{u\to-\infty} \frac{u}{2}e^{-u} = -\infty$, donc $\lim\limits_{u\to-\infty} \left(\frac{u}{2}+2+\frac{u}{2}e^{-u}\right) = -\infty$.

3.a. la fonction f est dérivable sur ℝ et pour tout réel x on a: $f'(x) = 1+e^{-2x}+(-2x)e^{-2x} = e^{-2x}\left(1-2x+e^{2x}\right) = g(x)e^{-2x}$.

3.b. $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ car $e^{-2x} > 0$, $g(x) > 0$ pour tout réel x ,on en déduit les variations de f sur ℝ :
la fonction f est strictement croissante sur ℝ

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$f(0) = 0+2-0 = 2$,comme f est strictement croissante
On a pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) > f(0) > 2 > 0$.

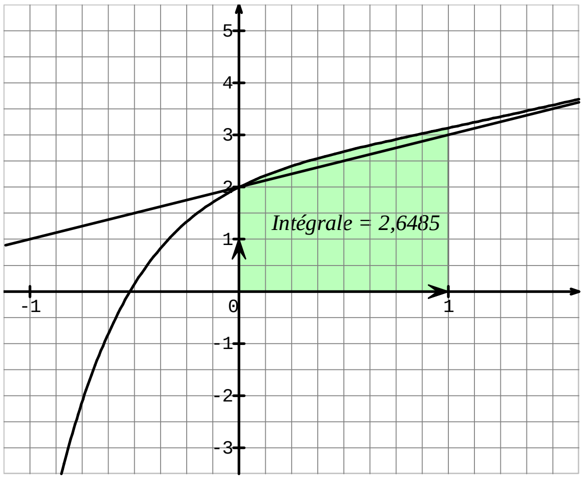
4.a $f(x) = x+2+xe^{-2x}$; $h(x) = f(x)-(x+2) = xe^{-2x}$; d'après la question précédente $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x} = 0$. Donc la droite d'équation : $y = x+2$ est une asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$

4.b $f(x) = x+2+xe^{-2x}$; $h(x) = f(x)-(x+2) = xe^{-2x}$,

h(x) est du signe de x car $e^{-2x} > 0$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)=f(x)-2$	$-$	0	+
position de C et Δ	C est en dessous de Δ		C est au dessus de Δ

-sur l'intervalle]- ∞ ; 0] la courbe est en dessous de la droite Δ.
-sur l'interva1le [0 ; + ∞ [la courbe est au dessus de la droite Δ.



6. a. La fonction G est dérivable sur ℝ et pour tout réel x on a :

$F(x) = \frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}$ • $F'(x) = \frac{2}{2}x+2-\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(-2e^{-2x}\right)$

$F'(x) = x+2-\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\right)+xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$; $F'(x) = x+2+xe^{-2x} = f(x)$

donc F est une primitive de la fonction f sur ℝ .

6.b L'aire est donc délimitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et la courbe C. d'après 3°)c $f(x) > 0$, la courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses , donc f est positive sur $[0;1]$. En unité d'aire :

$A = 2\int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = 2\times(F(1)-F(0))$ or $F(0) = -\frac{1}{4}e^0 = -\frac{1}{4}$

et $F(1) = \frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)e^{-2} = \frac{5}{2}-\frac{3}{4}e^{-2}$. Donc $A = 2\left(\frac{5}{2}-\frac{3e^{-2}}{4}+\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{11}{4}-\frac{3e^{-2}}{4}\right) = \left(\frac{11}{2}-\frac{3}{2e^2}\right)cm^2 \approx 5{,}3cm^2$.