PROF :	CHAPITRE : EQUA DIFF-COMPLEXES-FCTION EXPO	ISTAS
	DEVOIR SURVEILLE N° DE MATHEMATIQUES	DUREE

EXERCICE 1

Soit l'équation différentielle (E) : y' + y = x , où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : y'+ y = 0.
2. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur R par : g(x) = a x + b , est solution de l'équation (E).
3. a. Le nombre k désignant une constante réelle, on considère la fonction I définie sur R par: $f(x) = k\,e^{-x} + x - 1$.Vérifier que la fonction f est solution de l'équation (E).
   b. Déterminer le réel k pour que f(0) = 0.
4. Dans cette question, on prend k = 1 .
   a. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle [0 ; 2] .
   b. En déduire une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

EXERCICE 2

On considère les nombres complexes : $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ $z_2 = 1 - i$ $z_3 = \dfrac{2}{z_2}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Mettre le nombres z_3 sous forme algébrique .
2. Calculer le module et un argument de z_1, z_2 et z_3 , puis en déduire leur forme trigonométrique.
3. Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 .
4. Démontrer que le triangle BOC est rectangle en O.
5. Déterminer l'affixe z_4 du point D pour que le quadrilatère OADC soit un parallélogramme.
   on mettra le nombre complexe z_4 sous la forme algébrique.

PROBLEME

On considère la fonction f , définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x) = e^{2x} - 10e^{x} + 16$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

(unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = (e^{x} - 2)(e^{x} - 8)$.
   b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. On appelle $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f .
   a) Calculer $f\,'(x)$ et vérifier que, pour tout nombre réel x, $f\,'(x) = 2e^{x}(e^{x} - 5)$
   b) Etudier le signe de $f\,'(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire les variations de la fonction f sur **R**.
4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis au dixième.

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$				7			

5. a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 0.
   b) Construire la droite T puis, sur le même graphique, la partie de la courbe C_f correspondant aux valeurs de x appartenant à l'intervalle [-3 ; 2,2].
   c) Compléter le graphique précédent en traçant la droite d'équation $y = 16$. On mettra en évidence le point B de C d'abscisse ln 5, ainsi que la tangente à C_f en ce point.
6. a) Calculer $f(\ln 2)$. Indiquer, sans justification, le signe de la fonction f sur l'intervalle [0 ; ln 2].
   b) On considère le domaine plan D limité par la courbe C_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$. Calculer l'aire A du domaine D. Donner une valeur approchée de A au centième.

CORRIGE

Exercice 1

1) Soit l'équation différentielle : (H) : y' + y = 0   y ' = -y   d'où $y = k\,e^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$.

2) Si g(x) = a x + b est solution de l'équation (E) alors on a : a + a x + b = x pour tout $k \in \mathbb{R}$

d'où $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 1 \\ b = -a = -1 \end{cases}$ et g(x) = x - 1 .

3) a) $f(x) = k\,e^{-x} + x - 1$ on a $f\,'(x) = -k\,e^{-x} + 1$, donc $f\,'(x) + f(x) = -k\,e^{-x} + 1 + k\,e^{-x} + x - 1 = x$.

pour $k \in \mathbb{R}$ on a : f ' (x) + f (x) = x ; et f est solution de (E) .

b) $f(x) = k\,e^{-x} + x - 1$ si f (0) = 0 alors k − 1 = 0 d'où k = 1

4) a) k = 1 $f(x) = e^{-x} + x - 1$. $\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx$; $\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 (e^{-x} + x - 1)dx$ $\mu = \frac{1}{2}\left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^2$;

$\mu = \frac{1}{2}\left[-e^{-2} + \frac{4}{2} - 2 - (-e^{0} + 0 - 0)\right]$ $\mu = \frac{1}{2}\left[-e^{-2} + 2 - 2 + 1\right]$ $\mu = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-2}\right]$. b) m = 0,43 à 10^{-2}près par défaut.

Exercice 2

$$z_3 = \frac{2}{z_2} = \frac{2}{1-i} = 1 + i$$

$$|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

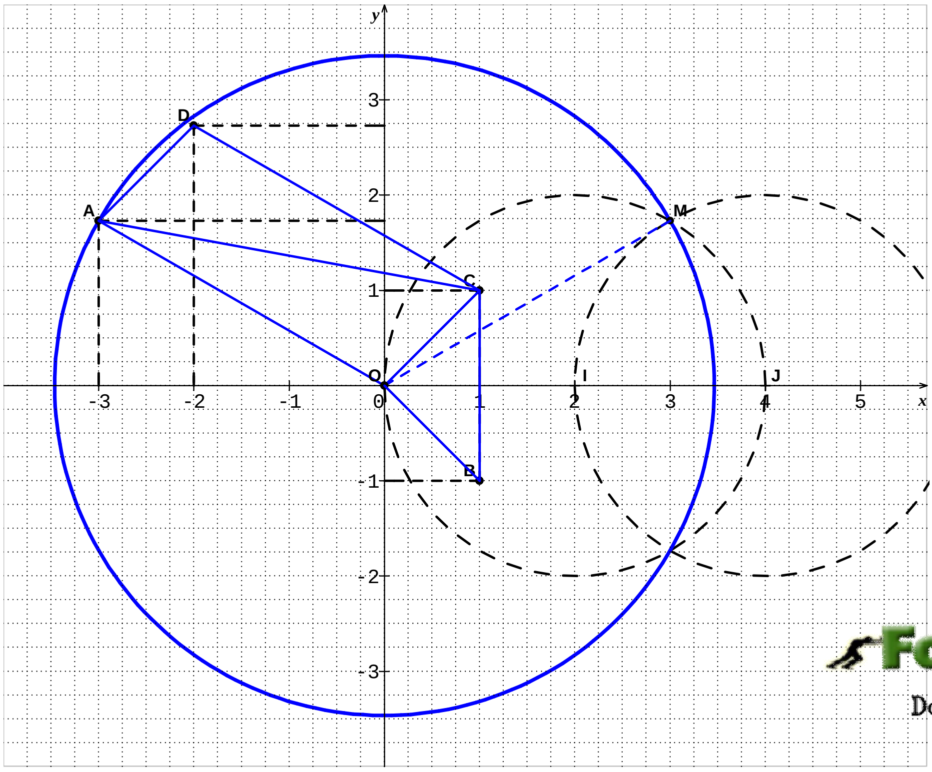
$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|z_3| = \left|\frac{2}{z_2}\right| = \frac{2}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

. $\theta_1 = \arg z_1 : \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\;;\, k \in \mathbb{Z}$

$\theta_2 = \arg z_2 : \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, donc $\theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\;;\, k \in \mathbb{Z}$, comme $z_3 = \overline{z_2}$,

on a : $\arg z_2 = -\arg z_1 + 2k\pi$, donc $\theta_3 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\;;\, k \in \mathbb{Z}$



On sait que $|z_2| = |z_3| = \sqrt{2}$, on déduit que le triangle BOC est isocèle en O.

$z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = 1 + i - (1 - i) = 1 + i - 1 + i = 2i$, donc $BC = |z_{\overline{BC}}| = 2$

$BC^2 = 4$ et $OB^2 + OC^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 2 + 2 = 4$, on déduit que $BC^2 = OB^2 + OC^2$ et par conséquent Le triangle BOC est rectangle isocèle en O .

OADC est un parallélogramme signifie que $z_{\overline{AD}} = z_{\overline{OC}}$, donc $z_D - z_A = z_C$ ou encore

$z_D = z_C + z_A = 1 + i - 3 + i\sqrt{3} = -2 + (1+\sqrt{3})i$

Corrigé

Problème1

1. Limite en $-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 16$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 16$ en $-\infty$.

2. a) On développe : $(e^x - 2)(e^x - 8) = e^{2x} - 8e^x - 2e^x + 16 = e^{2x} - 10e^x + 16$

2. b) Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - 2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - 8\right) = +\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

3. a . Pour tout réel x, on a : $f'(x) = 2e^{2x} - 10e^x = 2e^x(e^x - 5)$.

3. b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, on a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$

De même : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5$

On obtient donc le tableau de signe suivant pour la dérivée et les variations de la fonction :

Avec : $f(\ln 5) = e^{2\ln 5} - 10e^{\ln 5} + 16 = e^{\ln 25} - 10\times 5 + 16$

$f(\ln 5) = 25 - 50 + 16 = -9$

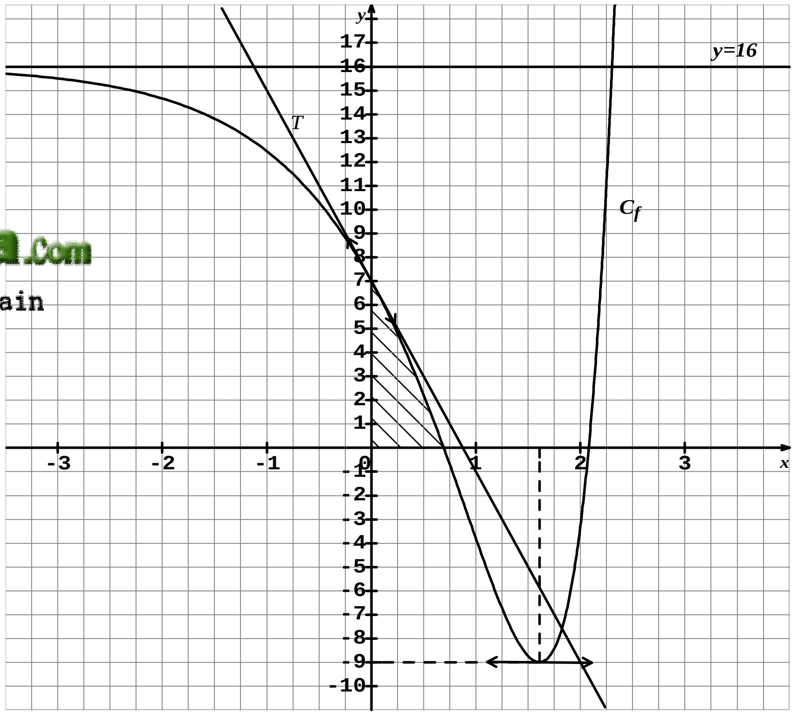
x	$-\infty$		$\ln 5$		$+\infty$
$e^x - 5$		$-$	0	$+$	
$2e^x$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	16 $+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	

4. **Tableau de valeurs :**

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$	**15,5**	**14,7**	**12,5**	7	**-3,8**	**-3,3**	**7,2**

5. a) Le coefficient directeur de la droite tangente au point d'abscisse 0 est égal au nombre dérivé en 0, c'est-à-dire $f'(0)$: $f'(0) = 2e^0(e^0 - 5) = 2(1-5) = -8$

5. b) et 5. c) Courbe représentative



6. a) $f(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 10e^{\ln 2} + 16 = e^{\ln 4} - 10\times 2 + 16 = 4 - 20 + 16 = 0$

Sur l'intervalle $[0\,;\ln 2]$ la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, donc $f(x) \geq 0$.

b) Calcul de l'intégrale de le fonction f sur l'intervalle $[0\,;\ln 2]$.

$$I = \int_0^{\ln 2} f(x)dx = \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 10e^x + 16)dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - 10e^x + 16x\right]_0^{\ln 2} = \left(\frac{e^{2\ln 2}}{2} - 10e^{\ln 2} + 16\times\ln 2\right) - \left(\frac{e^0}{2} - 10e^0 + 16\times 0\right)$$

$$I = \left(\frac{e^{\ln 4}}{2} - 10\times 2 + 16\ln 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 10\right) = \left(2 - 20 + 16\ln 2\right) - \left(-\frac{19}{2}\right) = -18 + 16\ln 2 + 9{,}5 = -8{,}5 + 16\ln 2 .$$

La fonction f étant positive sur $[0\,;\ln 2]$, alors l'intégrale est égale à l'aire en unité d'aires ; l'unité d'aire est

égale à $2\times 0{,}5 = 1cm^2$ donc : $\left(-8{,}5 + 16\ln 2\right)cm^2$. 6. c) $\left(-8{,}5 + 16\ln 2\right) \approx 2{,}59\ cm^2$