

PROF :	CHAPITRE : COMPLEXES-PROBABILITE	ISTAS
	DEVOIR SURVEILLE N° DE MATHÉMATIQUES	DUREE

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct. L'unité graphique est égale à 4 cm.

1. a. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

b. On désigne par z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative.

Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. Soit A le point du plan d'affixe z_1 et B celui d'affixe z_2 .

Placer les points A et B dans le plan complexe et démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

3. Soit E le point d'affixe $z_3 = e^{-i\pi/3}$ et F d'affixe $z_4 = e^{i\pi/6}$.

a. F est l'image de E par une transformation du plan.

Donner la nature de cette transformation et ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que F est le milieu du segment $[OB]$.

4. Soit D l'image de E par la translation de vecteur $2\vec{v}$.

a. Placer les points D , E et F sur la figure.

b. Déterminer l'affixe de D .

c. Montrer que $OD = DB$.

d. Qu'en déduire pour la droite (AD) , dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte de l'évaluation.



PROBLEME

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 5 + 5 \ln x$

On note g' la fonction dérivée de la fonction g .

1. Calculer $g'(x)$ pour x dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Etudier le signe de $g'(x)$ et donner le sens de variation

de la fonction g (l'étude des limites n'est pas demandée).

2.a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1; 5]$.

On note α cette solution.

b. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α .

3. Etudier le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-5)\ln x}{x}$. On peut donc aussi écrire :

$$f(x) = \frac{1}{x}(x-5)\ln x \text{ ou encore } f(x) = \ln x - \frac{5 \ln x}{x}.$$

1. a. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2.a. Soit f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

3. On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a. Soit A le point de la courbe d'abscisse 1.

Donner une équation de la droite D tangente en A à la courbe C .

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et de l'axe des ordonnées.

b. Tracer la droite D et la courbe C

PARTIE C

1. Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x - \frac{5}{2}(\ln x)^2$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f .

2. a. Hachurer l'aire du domaine plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

b. Déterminer graphiquement une valeur approchée au cm^2 de l'aire du domaine.

c. Calculer la valeur exacte, en cm^2 de $A = -4[F(e) - F(1)]$.



Correction

Exercice 1

1. a. $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4 = (2i)^2 < 0$

$$\text{Donc } z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$$

On constate que $z_2 = \bar{z}_1$.

b. $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$ $z_1 = a + bi$ donc $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$$\text{Soit } \theta_1 = \arg z_1 : \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{a}{|z_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{b}{|z_1|} = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ donc } \theta_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

On sait que $z_2 = \bar{z}_1$, donc ils ont le même module et $\arg z_2 = -\arg z_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$z_1 = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right] \text{ et } z_2 = \left[2; \frac{\pi}{6} \right] \text{ d'où } z_1 = 2e^{-i\pi/6} \text{ et } z_2 = 2e^{i\pi/6}.$$

2.

$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = \sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i = 2i$, donc $|z_{\overline{AB}}| = |2i| = 2$, comme $|z_1| = |z_2| = |z_{\overline{AB}}| = 2$, le triangle OAB est un triangle équilatéral.

3. a. $\frac{z_4}{z_3} = \frac{e^{i\pi/6}}{e^{-i\pi/3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $z_4 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_3$ par conséquent F est l'image de E par la rotation

De centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. Soit M le milieu de $[OB]$, donc on a : $z_M = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, donc $z_M = z_4$ et par conséquent les points M et F sont confondus et F est le milieu de $[OB]$.

4. a. D est l'image du point E par la translation de vecteur $2\vec{v}$ signifie que $\overline{ED} = 2\vec{v}$

Donc $z_D - z_E = 2i \Leftrightarrow z_D = 2i + z_E = 2i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Donc $z_D = \frac{1}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

b. $OD = |z_D| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 - 2\sqrt{3} + \frac{3}{4}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

c. $z_{\overline{DB}} = z_B - z_D = \sqrt{3} + i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 2i = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i$

$DB = |z_{\overline{DB}}| = |z_B - z_D| = \sqrt{\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{3 + \frac{1}{4} - \sqrt{3} + \frac{3}{4} - \sqrt{3} + 1} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$

On déduit que $OD = DB = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

d. On sait que le triangle OAB est équilatéral donc $AO = AB$

on déduit que A appartient à la médiatrice du segment [OB] et on sait que $OD = DB = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

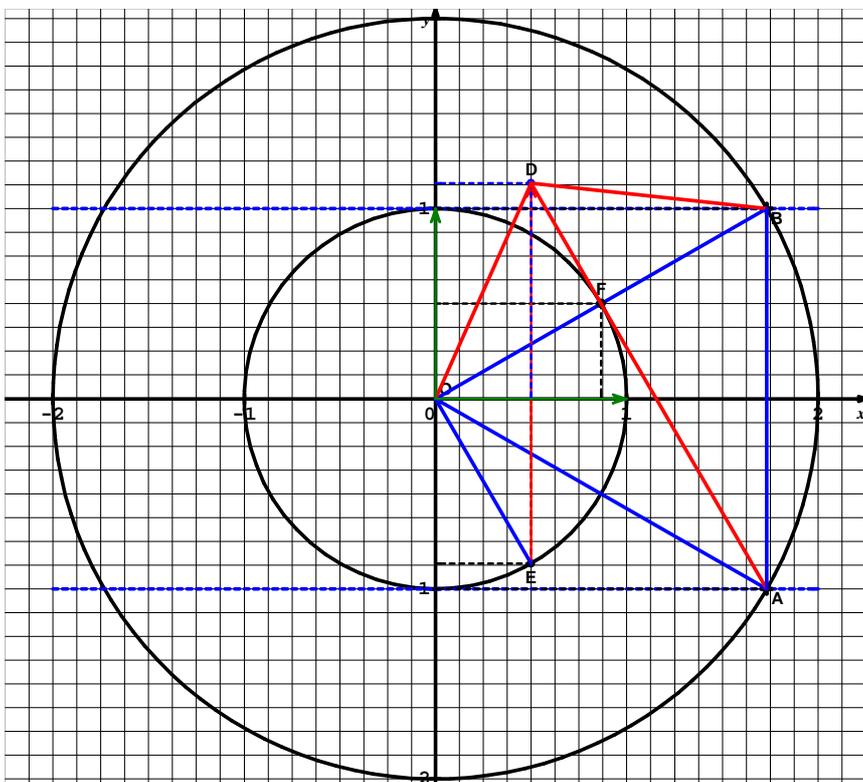
On déduit que D appartient à la médiatrice de [OB]

Ce qui démontre que la droite (AD) est la médiatrice du segment [OB].

On peut aussi démontrer que les droites (AD) et (OB) sont perpendiculaires par la méthode du produit scalaire.

$z_{\overline{DA}} = z_A - z_D = \sqrt{3} - i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 2i = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right)i$; donc $\overline{DA} \left(\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) \right)$

$\overline{OB}(\sqrt{3}; 1)$, d'où $\overline{DA} \cdot \overline{OB} = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) \times \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) \times 1 = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 = 0$. cqfd.



Problème
 Partie A

1. g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = 1 + \frac{5}{x} = \frac{x+5}{x}$. $x+5 > 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. donc $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et par conséquent la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2.a . la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. elle est strictement croissante sur $[1; 5] \subset]0; +\infty[$ et on a : $g(1) = 1 - 5 + 5 \ln 1 = -4 < 0$ et $g(5) = 5 - 5 + 5 \ln 5 = 5 \ln 5 > 0$

$0 \in [g(1); g(5)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires on déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$ et $\alpha \in [1; 5]$.

b. à l'aide de la calculatrice on lit : $g(1,87) = -0,0003 < 0$ et $g(1,88) = 0,036 > 0$, donc $1,87 \leq \alpha \leq 1,88$.

3. signe de $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		- 0 +	

Partie B

1.a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-5) = -5$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc par produit des limites on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty .$$

On déduit que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln x}{x} = 0$ par différence des limites on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a . f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 5 \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{x - 5 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} .$$

b. pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a : $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$



3.a. Soit A le point de la courbe C d'abscisse 1

Equation de la tangente en A à la courbe C est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$f'(1) = \frac{g(1)}{1^2} = g(1) = 1 - 5 + 5 \ln 1 = -4 \text{ et } f(1) = \frac{(1-5) \ln 1}{1} = 0$$

$$D : y = -4(x-1) + 0 = -4x + 4 .$$

Coordonnées du point d'intersection de D et de l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée à l'origine

On pose $x = 0$ donc $y = 4$ et on a : $(0; 4)$.

b. graphique

Partie C

1. $F(x) = x \ln x - x - \frac{5}{2} (\ln x)^2$. F est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on a : $(u^2)' = 2u'u$, donc

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 - \frac{5}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \ln x = \ln x + 1 - 1 - 5 \frac{\ln x}{x} = \ln x - 5 \frac{\ln x}{x} = f(x)$$

Donc la fonction F est bien une primitive de la fonction f .

2.a . voir figure

b. Soit E le point de coordonnées $(e ; 0)$ et F celui de coordonnées $(e ; -1)$ et G $(1 ; -1)$

l'aire du rectangle AEFG vaut en unité d'aire : $A = L \times l = (e-1) \times 1 = (e-1)u.a$

or l'unité d'aire vaut $u.a = 2 \times 2 = 4cm^2$, donc l'aire du rectangle ACFG est égale

$$A = 4(e-1) \approx 6,8cm^2.$$

c.

La courbe C est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1; e]$

$$\text{Donc } A = \left(-\int_1^e f(x)dx \right) u.a = 4 \left(-\int_1^e f(x)dx \right) = -4[F(e) - F(1)]cm^2.$$

$$F(e) = e \ln e - e - \frac{5}{2}(\ln e)^2 = e - e - 2,5 = -2,5 \text{ et } F(1) = 1 \times \ln 1 - 1 - \frac{5}{2}(\ln 1)^2 = 0 - 1 - 0 = -1$$

$$\text{Donc } A = -4[F(e) - F(1)] = -4(-2,5 + 1) = -4 \times (-1,5) = 6cm^2$$

