DS N°3 MATHEMATIQUES TERMINALE STL-PH ANNEE 2009-2010

Exercice 1 : 6 points

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation $z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$

2. Soit z_0 le nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{6}$.

   Calculer le module et un argument du nombre complexe $z_0{}^3$.

   En déduire la forme algébrique de $z_0{}^3$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 8i$; $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ et $z_C = \overline{z_B}$ où $\overline{z_B}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_B.

1. Calculer le module et déterminer un argument de z_B puis de z_C.

2. Vérifier que $z_A = 8e^{i\pi/2}$.

3. On appelle z_D l'affixe du point D, image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$.

   a. Déterminer z_D et l'écrire sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

   b. En déduire que $z_D = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. a. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 1 cm.

   b. Démontrer que le triangle OAD est équilatéral.

   c. Démontrer que le point O est le milieu du segment [CD].

   d. Déterminer la nature du triangle ACD.

Exercice 4 points

Pour un jeu de hasard, on place dans un sac opaque cinq jetons numérotés de 1 à 5, indiscernables au toucher.

1. Lors d'une partie, un joueur pioche au hasard dans le sac un jeton qu'il place devant lui. Il pioche ensuite au hasard un second jeton qu'il place à droite du premier, formant ainsi un nombre de deux chiffres. Le premier jeton tiré indique donc le chiffre des dizaines et le second celui des unités.

   a. À l'aide d'un arbre, écrire les 20 nombres qu'il est possible d'obtenir.

   b. Soit M_2 l'évènement « le nombre obtenu est un multiple de 2 » et M_3 l'évènement « le nombre obtenu est un multiple de 3 ». Démontrer que $p\left(M_2\right) = p\left(M_3\right)$.

c. Déterminer la probabilité de l’évènement A : « le nombre obtenu est un multiple de 3 qui n’est ni un multiple de 2 ni un multiple de 5 ».

2. Un joueur doit miser 3 euros pour faire une partie.
Si le nombre obtenu est un multiple de 2, le joueur perçoit 2 euros.
Si le nombre obtenu est un multiple de 3,le joueur perçoit 3 euros.
Si le nombre obtenu est un multiple de 5, le joueur perçoit 5 euros.
Les sommes perçues sont cumulatives. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45 *qui est à la fois un multiple de* 3 *et de* 5*, il perçoit* 8 *euros*).
On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain (positif ou négatif) finalement réalisé par le joueur en tenant compte de la mise initiale.
(*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45*, la variable aléatoire X prend la valeur* 8−3 = 5).

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire *X*.

b. Démontrer que $p\left(X=0\right)=\dfrac{1}{10}$.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

3. Calculer l’espérance mathématique $E\left(X\right)$ de la variable aléatoire X . Le jeu est-il équitable ?

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1.Déterminer les coordonnées des points A et B intersections de C_f avec la droite d’équation $y=3$.
A étant des deux points celui dont l’abscisse est la plus petite.

2. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

3. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de la fonction f.

4. Déterminer les équations des droites (T_A) et (T_B) tangentes respectives aux points A et B de la courbe C_f.

5. a. Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

b. Montrer que la droite (D) d’équation $y=x-3$ est asymptote à C_f quand x vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

c. Etudier la position relative de la courbe C_f par rapport à la droite (D).

6-Construire dans un même repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d’unité graphique 2cm les droites (T_A) et (T_B), la droite (D) et la courbe C_f

Correction

Exercice 1 6 points

Partie A

1. $z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = \left(8\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 64 = 192 - 256 = -64 = (8i)^2$

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8\sqrt{3}-8i}{2} = 4\sqrt{3}-4i \text{ et } z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8\sqrt{3}+8i}{2} = 4\sqrt{3}+4i .$$

Les racines sont donc : $4\sqrt{3}+4i$ et $4\sqrt{3}-4i$.

2. on a : $\left|z_0^3\right| = \left|z_0\right|^3 = 2^3 = 8$. De même $\arg z_0^3 = 3\arg z_0 = 3\times\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, on obtient donc $z_0 = 8e^{i\pi/2} = 8i$

Partie B

1.Soit $z_B = 4\sqrt{3}+4i$. On a : $\left|z_B\right| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{45+16} = \sqrt{64} = 8$ donc $\left|z_B\right| = 8$

Soit $\theta_B = \arg z_B$ avec $\begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$,

donc on obtient : $z_B = 4\sqrt{3}+4i = r\left(\cos\theta_B + i\sin\theta_B\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 8e^{i\pi/6}$

Comme $z_C = \overline{z_B}$,alors $z_C = 8e^{-i\pi/6}$ .Un des arguments de z_C est $z_C = -\pi/6 + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. Comme i le nombre complexe est : de module 1 et d'argument $\pi/2$.
On en déduit l'écriture exponentielle : $z_A = 8i = 8e^{i\pi/2}$.

3. a. L'écriture complexe de la rotation est : $z' - z_O = (z - z_O)e^{i\pi/3}$, donc

$$z_D = z_A e^{i\pi/3} = 8e^{i\pi/2}\times e^{i\pi/3} = 8e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8e^{5\pi i/6} = 4\left(\cos\left(5\pi/6\right) + j\sin\left(5\pi/6\right)\right) = -4\sqrt{3}+4i$$

4.a On place B sur le cercle de centre O et de rayon 8 et la droite d'équation $y = 4$.

b. Par définition de la rotation OA = OD, donc OAD est isocèle en O.

De plus $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{3}$ angle de rotation

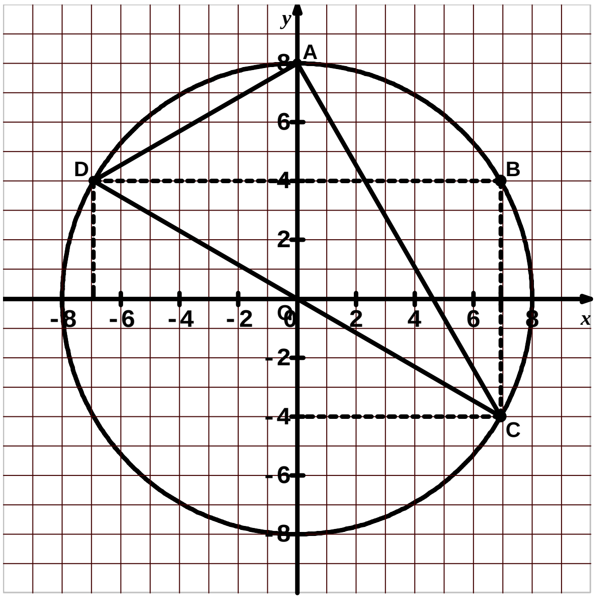
$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right) = \arg\left(z_D - z_A\right) = \left(\overrightarrow{OA};\vec{u}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{OD}\right) = -\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{OD}\right) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

. Il en résulte que les angles à la base ont également une mesure égale à $\frac{\pi}{3}$. Il est donc équilatéral.

c. On a $z_M = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{4\sqrt{3}-4i-4\sqrt{3}+4i}{2} = 0$. Donc $M \equiv O$ et O est le milieu de [CD].

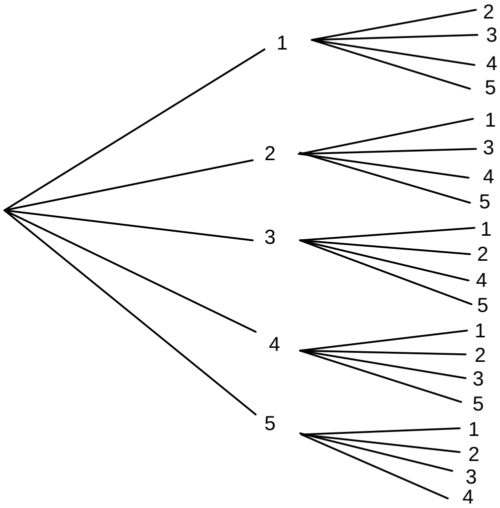
d. D'après la question précédente [CD] est un diamètre du cercle de centre O et de rayon 8 ;

A étant un point de cercle ($|z_A| = |8i| = 8|i| = 8$). le triangle ACD est donc rectangle en A.



Exercice 2 : 4 points

1. a. voir l'arbre ci-contre



b. Il y a 8 tirages donnant un nombre pair et 8 tirages donnant un multiple de 3, donc

$p(M_2) = p(M_3) = \frac{8}{20} = \frac{4}{5}$.

c. Les tirages multiples de 3 sont :
12 ; 15 ; 21 ; 24 ; 42 ; 45 ; 51 ; 54.
il faut supprimer les pairs : 12 ; 24 ; 42 ; 54 et
dans ceux qui restent les multiples de 5, soit 15 et 45.
Il reste donc 21 et 51. On a donc $p(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

2. a. 13 ; 23 ; 31 ; 41 ; 43 ; 53 qui sont premiers donnant un gain de 0−3 = −3.
14 ; 32 ; 34 ; 52 sont seulement pairs ; ils donnent un gain de 2−3 = −1.
2 ; 24 ; 42 ; 54 sont pairs et multiples de 3 ; ils donnent un gain de 2+3−3 = 2.
21 ; 51 sont multiples de 3, mais pas de 2 ni de 5 ; ils donnent un gain de 3−3 = 0.
25 ; 35 sont multiples de 5, mais pas de 2 ni de 3 ; ils donnent un gain de 5−3 = 2.
15 et 45 sont multiples de 3 et de 5 ; ils donnent un gain de 3+5−3 = 5.
Donc $X = \{-3 ; -1 ; 0 ; 2 ; 5\}$

b. Deux tirages (21 et 51) donnent un gain de 0 € ; la probabilité $p(X = 0) = \frac{2}{20}\frac{1}{10} = 0{,}1$.

c. On a le tableau suivant :

$X = k$	-3	-1	0	2	5
$p(X = k)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$

3. $E(X) = -3\times\frac{6}{20} - 1\times\frac{4}{20} + 0\times\frac{2}{20} + 2\times\frac{6}{20} + 5\times\frac{10}{20} = \frac{-18-4+12+10}{20} = \frac{0}{20} = 0$.

L'espérance de gain étant nulle, le jeu est équitable.

Exercice 3

1°) Etude de fonction $f(x)=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}=3 \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2-4x+7}{x-1}-3=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+7-3(x-1)}{x-1}=0$

$$\frac{x^2-7x+10}{x-1}=0;\Delta=49-4\times1\times10=9>0$$

donc 2 racines réelles : $x_1=\dfrac{7-3}{2}=2 \quad et \quad x_2=\dfrac{7+3}{2}=5$

La droite d'équation $y=3$ coupe la courbe représentative de *f* en deux points d'abscisses 2 et 5.

A(2 ; 3) et B(5 ;3) sont donc les deux points recherchés.

2°) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} x^2-4x+7=1-4+7=4\\ \lim\limits_{x\to1^-} x-1=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} x^2-4x+7=1-2+5=4\\ \lim\limits_{x\to1^+} x-1=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

pour $x\neq0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \; d'où \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=+\infty \; d'où \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

3°) $f'(x)=\dfrac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+7)\times1}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-7}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$f'(x)$ est du signe de x^2-2x-3 car $(x-1)^2$ sur]1 ;+ ∞ [. Calculons les racines du polynôme x^2-2x-3

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)=4+12=16>0$;donc 2 racines réelles : $x_1=\dfrac{2-4}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \quad et \quad x_2=\dfrac{2+4}{2}=3$

Ce polynôme admet deux racines réelles –1 et 3 donc x^2-2x-3 est positif à l'extérieur de ces racines –1 et 3 on en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f*

f admet un minimum en 3 qui est : $f(3)=\dfrac{3^2-4\times3+7}{3-1}=\dfrac{9-12+7}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

4) déterminons les équations réduites des tangentes (T_A) et (T_B) aux points d'abscisses 2 et 5 de la courbe :

coefficient directeur de la tangente au point A : $f'(2)=\dfrac{2^2-2\times2-3}{(2-1)^2}=\dfrac{4-4-3}{1}=-3$

Equation de la tangente au point A : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$; $y=-3(x-2)+3=-3x+6+3$.

$$\boxed{(T_A) : y=-3x+9}$$

coefficient directeur de la tangente au point B : $f'(5)=\dfrac{5^2-2\times5-3}{(5-1)^2}=\dfrac{25-10-3}{16}=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$

Equation de la tangente au point B : $y=f'(5)(x-5)+f(5)$ $\; y=\dfrac{3}{4}(x-5)+3 \quad y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{15}{4}+\dfrac{12}{4}$ $\boxed{(T_B):y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}}$

5 $x-3+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-1)}+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{x^2-x-3x+3+4}{x-1}=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}=f(x)$ donc $f(x)=x-3+\dfrac{4}{x-1}$

$f(x)-(x-3)=x-3+\dfrac{4}{x-1}-(x-3)=\dfrac{4}{x-1} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=0.$donc la droite d'équation $y=x-3$ est asymptote à C_f en $-\infty$ et $+\infty$

6°)Position de la courbe C_f par rapport à l'asymptote (D') :

$x-1<0$ si et seulement si $x<1$;

$x-1>0$ si et seulement si $x>1$

$f(x)-(x-3)=\dfrac{4}{x-1}<0$ sur $\left]-\infty\,;1\right[$,

C_f est strictement au dessous de la droite (D) d'équation $y = x-3$

et $f(x)-(x-3)=\dfrac{4}{x-1}>0$ sur $\left]1\,;+\infty\right[$,

C_f est strictement au dessus de la droite (D) d'équation $y = x-3$

7) Construction de la courbe C_f et des droites (D), (T_A), (T_B).