DS n° 6 MATHEMATIQUES TERMINALE D 2008-*2009*

Exercice 1-5 points

La tension u aux bornes d'un circuit électrique vérifie l'équation différentielle (E) : $u''+3600\pi^2 u=0$ dans laquelle u'' désigne la dérivée seconde de la tension par rapport au temps t.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que : $f\left(\dfrac{1}{180}\right)=0$ et $f'(0)=-\dfrac{\pi}{2}$.

3. a) Vérifier que, pour tout réel t, on a : $f(t)=\dfrac{1}{60}\cos\left(60\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $\left[0\,;\dfrac{1}{90}\right]$.

Exercice 2 –

Dans cet exercice, l'unité de temps est l'heure et l'unité de température est le degré Celsius.
A l'instant t = 0, une tarte sort d'un four, à la température de 220°. Elle est alors placée dans une salle à 20°. On désigne par $f(t)$ la température de la tarte à l'instant t. On définit ainsi une fonction f dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
On suppose que la vitesse $f'(t)$ de refroidissement de la tarte est proportionnelle à la différence entre la température de la tarte et celle de la salle, c'est-à-dire $f(t)-20$
On admet donc qu'il existe un nombre réel λ tel que, pour tout nombre réel positif t, $f'(t)=a\left[f(t)-20\right]$

1. On pose : $y(t)=f(t)-20$

a . Montrer que la fonction y ainsi définie est solution de l'équation différentielle $y'(t)=a\,y(t)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$

b. Résoudre cette équation différentielle sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c. En déduire que, pour tout nombre réel positif t, $f(t)=Ce^{at}+20$, où C est un nombre réel.

d. En utilisant la valeur de $f(0)$, déterminer C.

2. a. Au bout d'un quart d'heure (c'est-à-dire pour $t=\dfrac{1}{4}$), la température de la tarte est égale à 60°.

Montrer que, pour tout nombre réel positif t, $f(t)=200e^{(-4\ln 5)t}+20$

b. Déterminer la température de la tarte au bout d'une demi-heure.

Problème 11 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$, où a, b et c désignent trois nombres réels tels que :

- le point A de coordonnées (0 ; −1) appartient à la courbe $\mathcal{C}$;
- la courbe $\mathcal{C}$ admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
- $f(1)=2e$.

Partie A

1. Démontrer que $c=-1$.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. En remplaçant c par sa valeur, donner pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et de b.

b. Calculer a et b.

Partie B

On admet que pour tout réel x, $f(x) = \left(2x^2 + x - 1\right)e^x$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que, pour tout entier naturel $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$).

Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = x(2x+5)e^x$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

Compléter le tableau de valeur suivant , arrondir à 10^{-2} près.

x	-5	-4	-3	$-2,5$	-2	-1	0	$0,5$	$0,75$	1
$f(x)$										

4. Tracer la courbe C dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

<u>Partie C</u>

On considère les fonctions F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (2x^2 - 3x + 2)e^x$.

1. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On appelle D la partie du plan comprise entre C , l'axe des abscisses , les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1/2$.

a. Hachurer D sur le graphique.

b. Calculer la valeur exacte de la mesure, en cm^2, de l'aire A de D puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction

Exercice 1

1. **Résolution l'équation différentielle (E) :** $u''+3600\pi^2 u=0 \Leftrightarrow u''+(60\pi)^2 u=0$

Donc : $u(t)=A\cos(60\pi t)+B\sin(60\pi t)$

2. **Recherche de la solution particulière f vérifiant les deux conditions initiales :**

On a : $f(t)=A\cos(60\pi t)+B\sin(60\pi t)$ Donc : $f'(t)=-60\pi A\sin(60\pi t)+60\pi B\cos(60\pi t)$

$$f\left(\frac{1}{180}\right)=0 \Leftrightarrow A\cos\left(\frac{60\pi}{180}\right)+B\sin\left(\frac{60\pi}{180}\right)=0 \Leftrightarrow A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$A+B\sqrt{3}=0$$

$$f'(0)=-60\pi A\sin(60)+60\pi B\cos(60)=-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 60\pi B=-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow B=-\frac{1}{120}$$

En utilisant la première relation entre A et B, on trouve : $A=-B\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{120}$

Donc, la solution de (E) vérifiant les deux conditions initiales est donnée par :

$$f(t)=\frac{\sqrt{3}}{120}\cos(60\pi t)-\frac{1}{120}\sin(60\pi t)$$

3. a) On utilise la formule d'addition : $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$$f(t)=\frac{1}{60}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(60\pi t)-\frac{1}{2}\sin(60\pi t)\right)=\frac{1}{60}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(60\pi t)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(60\pi t)\right)$$

Donc, on a bien : $f(t)=\frac{1}{60}\cos\left(60\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$

3. b) **Calcul de la valeur moyenne :**

Soit F une primitive de f : $F(t)=\frac{1}{3600}\sin\left(60\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$

$$I_m=90\int_0^{1/90} f(t)dt=90\left[F(t)\right]_0^{1/90}=90\left(F\left(\frac{1}{90}\right)-F(0)\right)=90\left(\frac{1}{3600}\sin\left(\frac{60\pi}{90}+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{3600}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$I_m=90\left(\frac{1}{3600}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{7200}\right)=\frac{1}{40}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{40}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

Donc la valeur moyenne sur cet intervalle est nulle.

Exercice 2

1.a) On a : $y(t)=f(t)-20$ .Donc : $y'(t)=f'(t)$

Or, on sait que : $f'(t)=a\left[f(t)-20\right]$ d'où $y'(t)=a\,y(t)$

Donc la fonction y est bien solution de l'équation différentielle $y'=a\,y$.

1. b) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'=a\,y$ est donnée par $y(t)=Ce^{at}$ où C est un réel.

1. c) On a : $y(t)=f(t)-20$ donc $f(t)=y(t)+20=Ce^{at}+20$ où C est un réel.

1. d) On utilise la condition initiale $f(0)=220$: $f(0)=220 \Leftrightarrow Ce^0+20=220 \Leftrightarrow C+20=220 \Leftrightarrow C=200$.

Donc la solution est donnée par : $f(t)=200e^{at}+20$

2. a) On sait que $f\left(\frac{1}{4}\right)=60$: $f\left(\frac{1}{4}\right)=60 \Leftrightarrow 200e^{\frac{a}{4}}+20=60 \Leftrightarrow 200e^{\frac{a}{4}}=40 \Leftrightarrow e^{\frac{a}{4}}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{a}{4}}\right)=\ln\left(\frac{1}{5}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{a}{4}=-\ln 5 \Leftrightarrow a=-4\ln 5$. Donc : $f(t)=200e^{(-4\ln 5)t}+20$

2. b) Température au bout d'une demi-heure, donc pour $t=\frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right)=200e^{(-4\ln 5)\frac{1}{2}}+20=200e^{-2\ln 5}+20=28$

Donc la température est de 28°C au bout d'une demi-heure.

<u>Problème</u>

Partie A

1. • le point A de coordonnées (0 ; −1) appartient à la courbe C signifie que $f(0)=-1$

• la courbe C admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses signifie que $f'(0)=0$

• $f(1)=2e$.

On va convertir ces hypothèse sous forme d'équation :

La première condition se traduit par : $f(0)=(a\times 0+b\times 0+c)e^{0}=c=-1$

2. Calculons la fonction dérivée de f : on a :

$f'(x)=(2ax+b)e^{x}+(ax^{2}+bx+c)e^{x}=(ax^{2}+(2a+b)x+(b+c))e^{x}$. $f'(x)=(ax^{2}+(2a+b)x+(b+c))e^{x}$

La deuxième condition se traduit par : $f'(0)=(b+c)e^{0}=0$, donc $b+c=0$ et $b=-c=1$

$f(1)=2e$ se traduit par : $f(1)=(a+b+c)e^{1}=2e$, donc $a+b+c=2$, donc $a=2-b-c=2-1+1=2$.

Partie B

1. $f(x)=\left(2x^{2}+x-1\right)e^{x}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^{2}+x-1)=2\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{2})=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, comme produit des limites .

2. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=0$ et $f(x)=\left(2x^{2}+x-1\right)e^{x}=2x^{2}e^{x}+xe^{x}-e^{x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2}e^{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ .On déduit que la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontal à la courbe C au voisinage de $-\infty$.

3. $f'(x)=(2x^{2}+(4+1)x)e^{x}=x(2x+5)e^{x}$, donc $f'(x)=x(2x+5)e^{x}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x(2x+5)=0\Leftrightarrow x=0\ ou\ x=-5/2$, puisque ($e^{x}>0$)

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-5/2$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-5/2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f(x)=\left(2x^{2}+x-1\right)e^{x}$: $f(x)=0\Leftrightarrow\left(2x^{2}+x-1\right)e^{x}=0\Leftrightarrow\left(2x^{2}+x-1\right)=0$

$\Delta=b^{2}-4ac=1-4(2)(-1)=9>0$, donc on a : $x_{1}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-3}{2\times 2}=-\frac{4}{4}=-1$ et

$$x_{2}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+3}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ f(-1)=0 \text{ et } f(\frac{1}{2})=0$$

par conséquent la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points A et B des coordonnées respectives $A(-1;0)$ et $B(1/2;0)$.

x	-5	-4	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	$0,75$	1
$f(x)$	$0,3$	$0,45$	$0,70$	$0,74$	$0,68$	$0,45$	0	$-0,60$	-1	0	$1,85$	$5,44$

Partie C

$F(x) = (2x^2 - 3x + 2)e^x$: $F'(x) = (4x-3)e^x + (2x^2 - 3x + 2)e^x = (2x^2 + 4x - 3x + 2 - 3)e^x = (2x^2 + x - 1)e^x$

On déduit que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

La courbe C est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-1;1/2]$, donc $f(x) \leq 0$ sur cet intervalle et on a : $A = -\left(\int_{-1}^{1/2} f(x)\right) u.a = \left(-\left[F(x)\right]_{-1}^{1/2}\right) \times 4 = 4\left(F(-1) - F(1/2)\right)$

$F(-1) = (2+3+2)e^{-1} = \dfrac{7}{e}$ et $F(1/2) = (2 \times (1/2)^2 - 3/2 + 2)e^{1/2} = (1/2 - 3/2 + 2)\sqrt{e} = \sqrt{e}$

$A = 4\left(\dfrac{7}{e} - \sqrt{e}\right) cm^2 \approx 3,706 cm^2$