DS n° 5 MATHEMATIQUES TERMINALE D JANVIER 2008-2009

Exercice1 : 5 points

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On note : i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$; z_1 le nombre complexe $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$.

1. On pose $z_2 = i\, z_1$, montrer que $z_2 = -\sqrt{3} - i$

2.a. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.

b. Placer dans le plan P le point M_1 d'affixe z_1 et le point M_2 d'affixe z_2.

3. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_A ; z_B et z_C telles que :

$z_A = -2 - 2i\sqrt{3}$. $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 8$

3.a. Montrer que $z_A = 2\,\overline{z_1}$ et que $z_B = -z_A$

b. Placer les points A,B et C dans le plan P.

c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

d. Calculer l'affixe du point D de sorte que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

Exercice 2 : 4 points

Une roue de loterie munie d'un index fixe est divisée en secteurs de mêmes dimensions et de différentes couleurs . Le jeu consiste à miser 20 € , à faire tourner la roue et à noter la couleur du secteur désigné* par l'index à l'arrêt de la roue. On admet que chaque secteur a la même probabilité d'apparaître.

La roue comporte :

* n secteurs rouges qui font perdre la mise (gain du joueur: – 20 €)
* 6 bleus où l'on reçoit 20 € (gain du joueur: nul)
* 3 verts où l'on reçoit 80 €
* 1 jaune où l'on reçoit 120 €

Soit X la variable aléatoire qui représente le gain du joueur .

1. Dans cette question, la roue comporte 14 secteurs rouges ($n = 14$).

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

2. Dans cette question, la roue comporte n secteurs rouges et son propriétaire désire gagner en moyenne au moins 15% des sommes misées.

a. Montrer que l'espérance mathématique de X_n doit être inférieure ou égale à –3.

b. Montrer que l'espérance mathématique de X_n est : $E(X_n) = \dfrac{-20\,n + 280}{n+10}$

c. Déterminer le nombre minimum n de secteurs rouges que doit comporter la roue.

PROBLEME : 11 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = -4\ln x + x^2 + 6$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1.a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

b. Montrer que $g'(x) = 0$ a une seule valeur $x = \sqrt{2}$ sur I.

c. Etudier le signe de $g'(x)$ sur I,et en déduire le tableau de variation de la fonction g

2. a. Calculer la valeur exacte de $g\left(\sqrt{2}\right)$.

b. Montrer que g est fonction positive sur l'intervalle I

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur] 0 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques : 4 cm .

1. Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction *f* lorsque *x* tend vers $+\infty$).

3.soit (Δ) la droite d'équation $y = \frac{x}{4}$. On considère la fonction *h* définie sur]0 ; +∞[par $h(x) = f(x) - \frac{x}{4}$.

a. Démontrer que (Δ)est asymptote à la courbe C.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ

c. Etudier la position relative de C et Δ sur] 0 ; +∞ [

4.

a. Calculer *f* '(*x*) pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$. *f* ' est la fonction dérivée de la fonction *f*

b. Vérifier que pour tout *x* de]0 ; +∞[: $f'(x) = \frac{g(x)}{4x^2}$.

c. Déduire de la partie A le sens de variation de *f* sur]0 ; +∞[.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.

6. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

7. Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $[1;2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

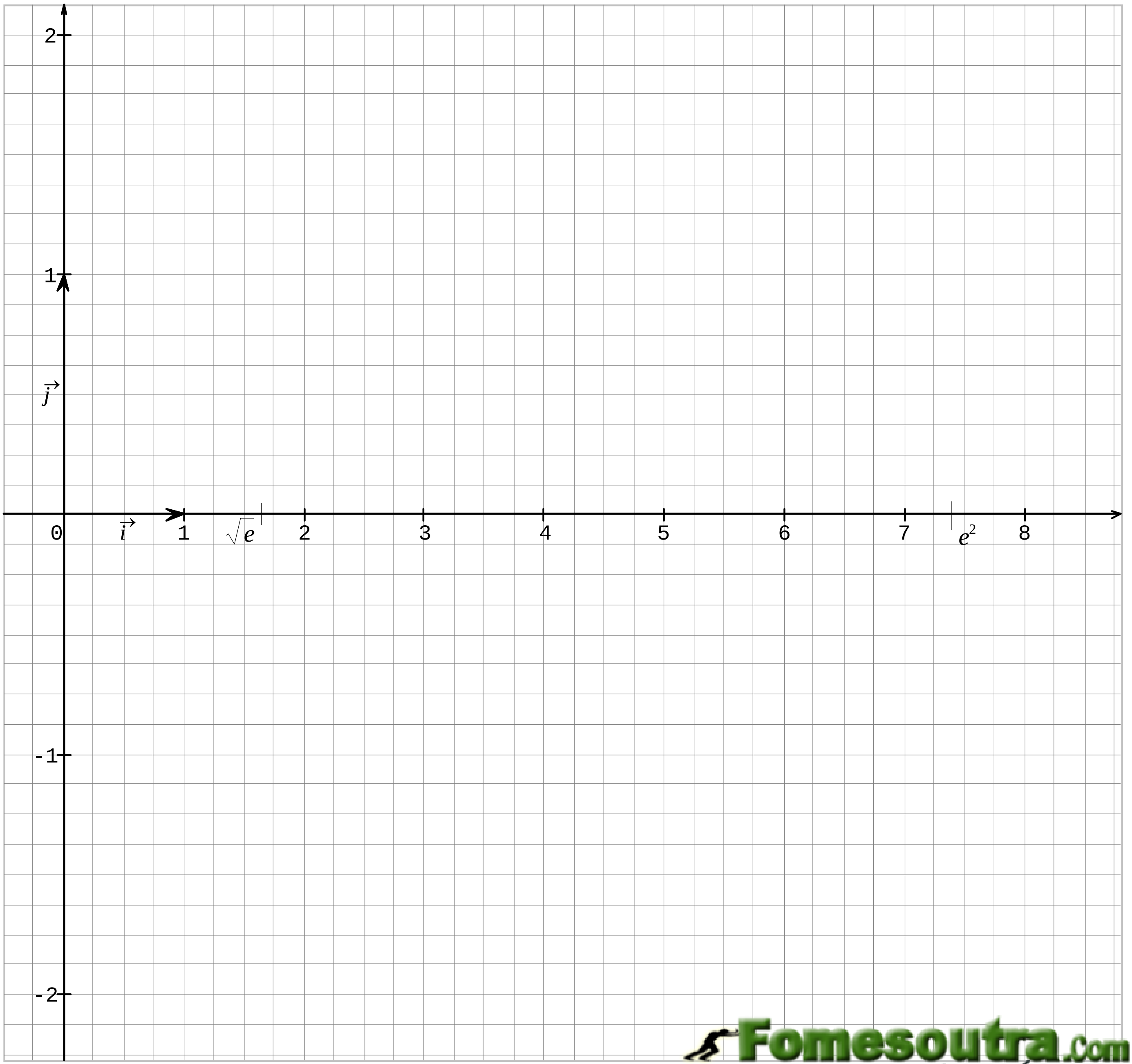
à l'aide de la calculatrice et en justifiant votre réponse donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C :

Soit *k* la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par $k(x) = (\ln x)^2$

1. On désigne par *k*' la fonction dérivée de la fonction *k*.
   Calculer *k* '(*x*) pour tout réel *x* de l'intervalle] 0 ; +∞ [.

2. En déduire une primitive *F* de la fonction *f* sur l'intervalle] 0 ; +∞ [.


2
1
$\vec{j}$
0
$\vec{i}$
1
$\sqrt{e}$
2
3
4
5
6
7
e^2
8
-1
-2

Correction

Exercice 1

1. $z_2 = iz_1 = i\left(-1+\sqrt{3}i\right) = -i-\sqrt{3} = -\sqrt{3}-i$

2.*a)*Calcul du module et d'un argument de z_1, z_2. On sait que si $z = a+bi$ alors $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ .Donc

$|z_1| = \left|-1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$,comme $z_2 = iz_1$, donc $|z_2| = |iz_1| = |i||z_1| = 1\times 2 = 2$

de plus, l'argument θ d'un nombre complexe $z = a+bi$ est défini par $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

Donc, si on note θ_1, et θ_2 les arguments des complexes $z_1$et z_2 alors on a :

L'argument $\theta_1$est défini par $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta_1 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ et $z_1 = \left[2;\dfrac{2\pi}{3}\right]$

L'argument $\theta_2$est défini par $\begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta_2 = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $z_2 = \left[2;-\dfrac{\pi}{6}\right]$

3.a $\overline{z}_1 = \left(-1-\sqrt{3}i\right)$, donc $2\overline{z}_1 = 2\left(-1-\sqrt{3}i\right) = -2-2\sqrt{3}i = z_A$ et $-z_A = -\left(-2-2\sqrt{3}i\right) = 2+2\sqrt{3}i = z_B$

c. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2+2i\sqrt{3} - \left(-2-2i\sqrt{3}\right) = 4+4i\sqrt{3}$ Donc on a : $\overrightarrow{AB}\left(4;4\sqrt{3}\right)$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 8 - \left(2+2i\sqrt{3}\right) = 6-2i\sqrt{3}$ Donc on a : $\overrightarrow{BC}\left(6;-2\sqrt{3}\right)$

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 8 - \left(-2-2i\sqrt{3}\right) = 10+2i\sqrt{3}$. Donc on a : $\overrightarrow{AC}\left(10;2\sqrt{3}\right)$

Deux méthodes envisageables :

1. produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = x_{\overrightarrow{AB}}x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{BC}} = 4\times 6 + (4\sqrt{3}\times -2\sqrt{3}) = 24-24 = 0$ ce qui montre

Que le triangle ABC est rectangle en B .

2. Réciproque du triangle Pythagore : $AB = \sqrt{4^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8cm$;

$BC = \sqrt{6^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}cm$. $AC = \sqrt{10^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{100+12} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}cm$.

On constate que $AB^2 + BC^2 = 64+48 = 112$ et $AC^2 = 112$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore Le triangle ABC est rectangle en B.

3. le quadrilatère ABCD soit un rectangle , donc en particulier ABCD est un parallélogramme

Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$: $z_C - z_B = 6-2i\sqrt{3}$ et

$z_D - z_A = z_D - (-2-2i\sqrt{3}) = z_D + 2 + 2i\sqrt{3})$, donc $z_D = 4-4i\sqrt{3}$

Solution exercice 2

1. Comme la roue ne peut s'arrêter que lorsque le repère est face à secteur vert, blanc , rouge, ou jaune le gain du joueur est soit 100, soit 60, soit 0 soit -20 (X prend donc les valeurs -20 , 0 , + 60 et 100).

$p(X=-20)$ est la probabilité pour qu'un secteur rouge s'arrête devant le repère.

Il y a quatorze secteurs rouges sur 24 secteurs, et on suppose qu'il y a équiprobabilité des événements élémentaires (puisque chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant le repère).

Donc: $p(X=-20)=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$.

De même, il y a six secteurs bleus, et $p(X=0)$ est la probabilité pour qu'un secteur bleu s'arrête devant le repère, d'où $p(X=0)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

il y a trois secteurs verts, et $p(X=60)$ est la probabilité pour qu'un secteur vert s'arrête devant le repère, d'où $p(X=60)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$, Enfin il y a un secteur jaune, et $p(X=100)$ est la probabilité pour qu'un secteur jaune s'arrête devant le repère, d'où $p(X=60)=\frac{1}{24}$, on déduit la loi de probabilité de X

x_i	-20	0	60	100
$p(X=x_i)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

L'espérance mathématique de X est : $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\,p(X=x_i)=-20\times\frac{7}{12}+0\times\frac{1}{4}+60\times\frac{1}{8}+100\times\frac{1}{24}$

$E(X)=\frac{-280+180+100}{24}=\frac{0}{24}=0$ .On déduit que le jeu est équitable .

$V(X=\sum_{i=1}^{4}x^2{}_i\,p(X=x_i)=(-20)^2\times\frac{14}{24}+0^2\times\frac{6}{24}+60^2\times\frac{3}{24}+(100)^2\times\frac{1}{24}=\frac{5600+10800+10000}{24}=\frac{26400}{24}=1100$

$\sigma(X)=\sqrt{1100}\approx 33{,}17$

2. a) X $_n$ prend les mêmes valeurs qu'au 1., c'est-à-dire + 100, +60 ; 0 et –20. Le raisonnement est identique à celui du 1, sauf que le nombre total de: secteurs est 6 +3 +1+ n = n + 10. D'où :

$p(X_n=-20)=\frac{n}{n+10}$ puisqu'il y a n secteurs rouges $p(X_n=0)=\frac{6}{n+10}$, car il y a 6 secteurs bleus.

$p(X_n=60)=\frac{3}{n+10}$, car il y a 3 secteurs verts.

$p(X_n=100)=\frac{1}{n+10}$, car il y a un secteur jaune. On peut résumer la loi de probabilité de X $_n$:

x_i	–20	0	60	100
$p(X=x_i)$	$\frac{n}{n+10}$	$\frac{6}{n+10}$	$\frac{3}{n+10}$	$\frac{1}{n+10}$

L'espérance mathématique de X est : $E(X_n)=\sum_{i=1}^{4}x_i\,p(X=x_i)$.

$E(X_n)=-20\times\frac{n}{n+10}+0\times\frac{6}{n+10}+60\times\frac{3}{n+10}+100\times\frac{1}{n+10}$. $E(X_n)=\frac{-20n+180+100}{n+10}=\frac{-20n+280}{n+10}$

b. L'organisateur de la loterie réalise15 % de bénéfices sur chaque mise c'est-à-dire $\frac{15}{100}\times 20=3$;

donc le joueur perd en moyenne 3 € pour chaque mise d'où E (X) ≤ -3

c. $E(X_n)\le -3 \Leftrightarrow \frac{-20n+280}{n+10}\le -3 \Leftrightarrow -20n+280\le -3\left(n+10\right)$, puisque n+10 > 0 ;

$-20n+280\le -3n-30 \Leftrightarrow -17n\le -310 \Leftrightarrow n\ge\frac{310}{17}\approx 18{,}33$, soit $n\ge\frac{310}{17}\approx 18{,}23$. Donc, le nombre minimum de cases rouges que l'organisateur doit prévoir pour ne pas être déficitaire est n_0 = 19.

Problème

A- $g(x)=x^2+6-4\ln x$; $g'(x)=2x-\frac{4}{x}=\frac{2x^2-4}{x}$; $g'(x)=\frac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$. Comme $x\in\left]0;+\infty\right[$ $\frac{2(x+\sqrt{2})}{x}>0$

Donc le signe de g'(x) dépend du signe de $x-\sqrt{2}$, d'où le tableau de variation
La fonction g admet un minimum égal à
g($\sqrt{2}$) = 2+6-4ln$\sqrt{2}$ =8–2ln2.
Par conséquent g(x)> 0 sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	$g\left(\sqrt{2}\right)$	↗	

B- a) $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{4})=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x})=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b- $\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{x}{4})=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0^+}(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty\cdot\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.
On déduit que la droite d'équation : x = 0 est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

c- $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{2}{x^2}+\frac{x\times\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}$; $f'(x)=\frac{x^2+2+4-4\ln x}{4x^2}$; $f'(x)=\frac{x^2+6-4\ln x}{4x^2}$ et $f'(x)=\frac{g(x)}{4x^2}$.

d-Le signe de f '(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$ dépend du signe e- de g(x) ; or g(x) =8-2ln2 > 0 pour tout $x\in]0;+\infty[$.
Il s'ensuit que f '(x) > 0 pour tout $x\in]0;+\infty[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	7/4	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗			$+\infty$

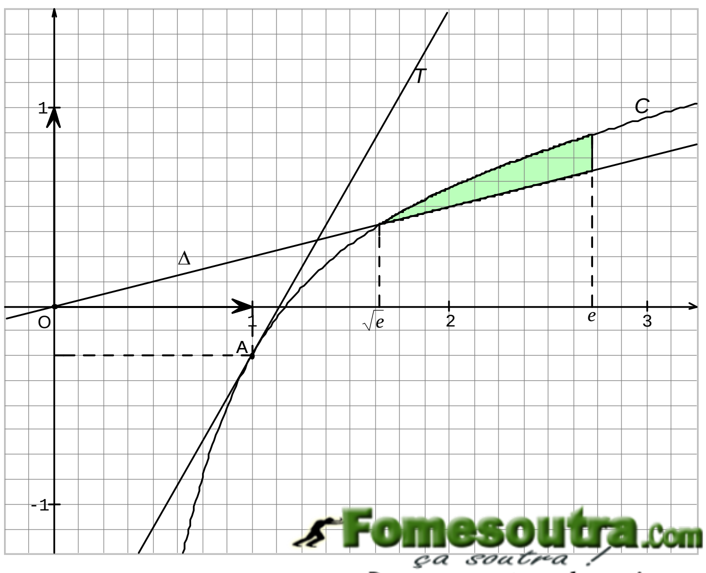
2-a) Soit $h(x)=f(x)-y$; $h(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}-\frac{x}{4}$.

$h(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$ .Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x})=0$ .Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$.
On déduit que la droite D est une asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b- Trouver les coordonnées du point d'intersection des courbes D et C revient à résoudre l'équation $f(x)$ = y c'est-à-dire $f(x)$ - y = 0 ou encore $h(x)$ = 0. donc $\frac{-1+2\ln x}{2x}=0$. $x\neq0$ et $2\ln x-1=0$.

$\ln x=\frac{1}{2}$ équivaut à $\ln x=(1/2)\ln e=\ln e^{1/2}$ et $x=e^{1/2}=\sqrt{e}$. $y=f(e)=\frac{\sqrt{e}}{4}$. $A(\sqrt{e};\frac{\sqrt{e}}{4})$.

c- Déterminer les positions relative de la courbe C par rapport à la droite D , revient à étudier le signe de $h(x)=f(x)-y$, c'est-à-dire le signe de $\frac{2\ln x-1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc il faut étudier de $2\ln x-1$.
$2\ln x-1>0$; $\ln x>1/2$, $\ln x>1/2=\ln e^{1/2}$, donc $x>e^{1/2}$. On déduit donc que sur l'intervalle $]e^{1/2};+\infty[$ la courbe C est au dessus de la droite D .
On démontre de même que sur l'intervalle $]0;e^{1/2}[$ la courbe C est en dessous de la droite D .

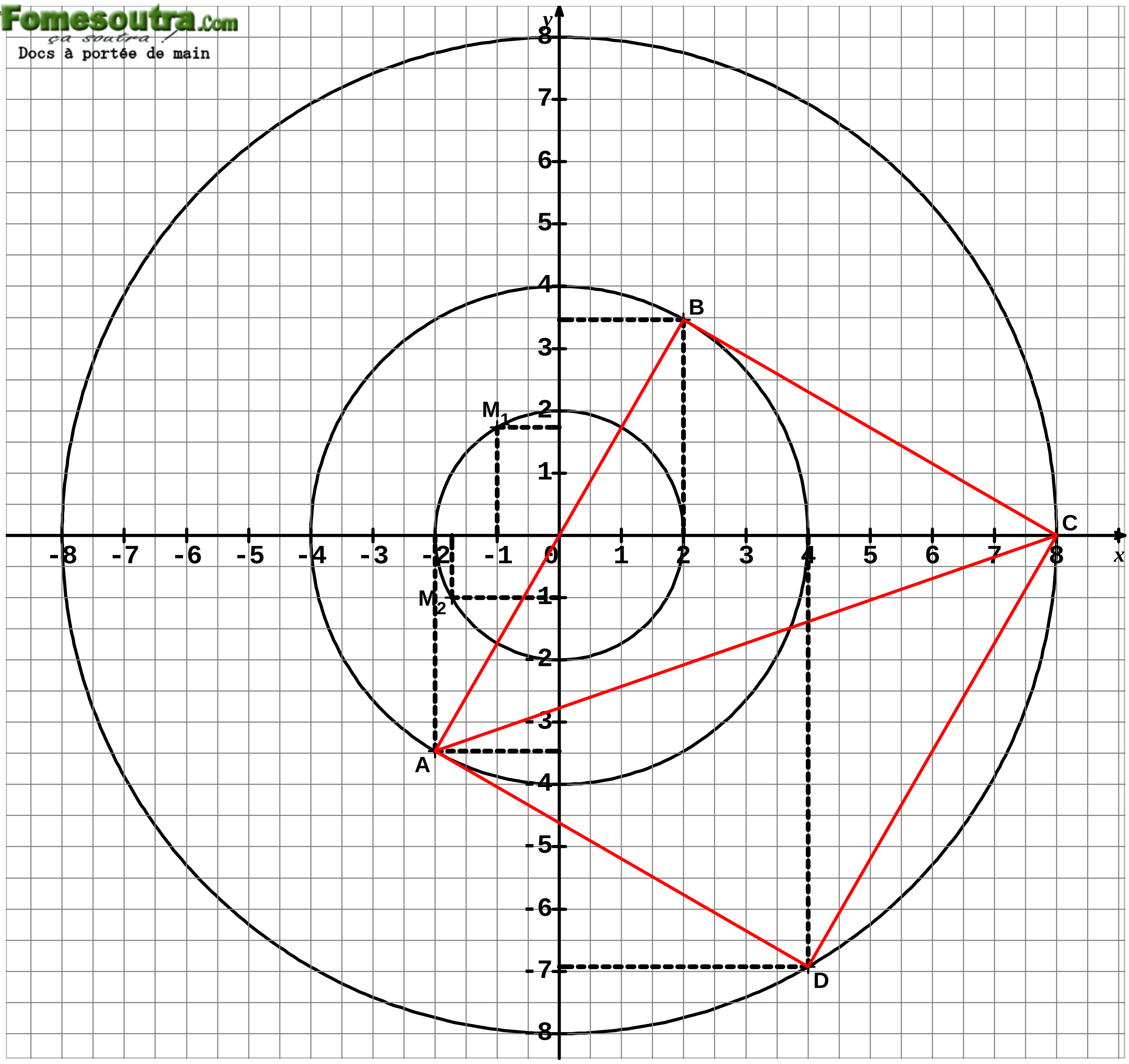


4- $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x)u(x)$ avec u= $\ln x$.
Donc une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $\frac{1}{2}u(x)^2$
Donc $H(x)=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ sur $]0;+\infty[$.

3- $A=16\times\left[H(e^2)-H(\sqrt{e})\right]$.

$H(e^2)=-\frac{1}{2}\ln e^2+\frac{1}{2}(\ln e^2)^2=-\frac{2}{2}+\frac{4}{2}=1$ et

$H(\sqrt{e})=\frac{-1}{2}\ln\sqrt{e}+\frac{1}{2}(\ln\sqrt{e})^2=\frac{-1}{4}\ln e+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln e\right)^2=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$. On déduit que $A=16\times\left(1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right)=16\left(\frac{9}{8}\right)=18cm^2$.


y
x
0
B
C
A
D
M1
M2