Corrigé

Exercice 2

1. L'équation $4y' + 5y = 0$ est de la forme $y' = -\frac{5}{4}y$ avec $a = -\frac{5}{4}$, or on sait que les solutions de cette équation

sont des fonctions y définies par $y = ke^{ax} = ke^{-\frac{5}{4}x}$ où k est une constante réelle quelconque.

2. $f(0) = 2$, avec $f(x) = ke^{-\frac{5}{4}x}$, on obtient : $f(0) = ke^0 = k = 2$ et on a : $f(x) = 2e^{-\frac{5}{4}x}$.

3. $V = \left(\pi \int_0^2 (f(x))^2 dx \right)_{u.v.} = \left(\int_0^2 4e^{-(5/2)x} dx \right)_{u.v.} = 4e^{-(5/2)x}$. donc

$$V = \left(\pi \int_0^2 (f(x))^2 dx \right)_{u.v.} = \left(\pi \int_0^2 4e^{-(5/2)x} dx \right)_{u.v.} = 4\pi \left[-\frac{2}{5}e^{-(5/2)x} \right]_0^2 = \frac{8}{5}\pi(-e^{-5} + 1)_{u.v.}$$

Exercice 3

1. $2y' + y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{2}y = 0$, donc l'équation différentielle (E) est de la forme $y' - ay = 0$ avec $a = -\frac{1}{2}$.

et a pour solution de la forme $y = ke^{ax}$, où k est constante réelle.

donc (E) a pour solution : $y = ke^{-x/2}$.

2. f est solution de l'équation (E), vérifiant $f(0) = 2$ donc $f(x) = ke^{-x/2}$.

$$f(0) = ke^0 = k = 2, \text{ puisque } e^0 = 1 \text{ et par conséquent } f(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}.$$

3. $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \times 2 \int_0^2 e^{-x/2} dx = \left[-2e^{-x/2} \right]_0^2$

$$M = -2e^{-1} + 2e^0 = 2(1 - e^{-1}) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 1,264, \quad M \approx 1,3 \text{ valeur arrondie à } 10^{-1} \text{ près.}$$

4. la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = 2 \times \frac{-1}{2} \times e^{-x/2} = -e^{-x/2}$. ($(e^{ax})' = ae^{ax}$)

On sait que la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) < 0$ et par conséquent est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, ce résultat nous conduit à éliminer le graphique 3

deux méthodes pour écarter le graphique 1. en effet :

1. $f'(0) = -1$ et l'équation de la tangente T en 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x + 2$.

En construisant la tangente on constate qu'elle coupe le graphique 1 en deux points, donc elle n'est tangente au graphique 1

2. Calculons $f(1) = 2e^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,21 > 1$, or sur le graphique 1 $f(1) < 1$ ce qui permet d'éliminer le

graphique 1, par conséquent le graphique qui donne la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$, est le graphique 2.