EXERCICE 1

Un circuit électrique comprend en série un générateur, un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms), un condensateur de capacité C (exprimée en farads) et un interrupteur. On ferme l'interrupteur à l'instant t = 0 et le générateur délivre alors une tension constante E (exprimée en volts).

On procède ainsi à la charge du condensateur. La charge q en coulombs du condensateur est une fonction dérivable du temps t (exprimé en secondes) ; l'intensité i du courant (exprimée en ampères) est alors telle que $i(t) = q'(t)$.On considère l'équation différentielle : $y' + \frac{1}{RC}y = \frac{E}{R}$ dans laquelle y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur R. Dans tout ce qui suit, on prend $R = 1000$, $C = 10^{-4}$ et $E = 10$.

1. Écrire l'équation différentielle ci-dessus en remplaçant R, C et E par leurs valeurs respectives.

2. On admet que la fonction q est définie sur $[0;+\infty[$ par $q(t) = 10^{-3}\left(1 - e^{-10t}\right)$.

a. Déterminer la fonction dérivée q′ de la fonction q, puis vérifier que q est solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle établie à la question 1.

b. Déterminer $q(0)$, la limite de q en +∞ et le sens de variations de q sur $[0;+\infty[$.

3. On admet que l'intensité du courant i qui parcourt le circuit à l'instant t est donnée par $i(t) = 10^{-2}e^{-10t}$.Déterminer la valeur exacte de l'instant t_0 à partir duquel l'intensité i (t) est inférieure ou égale à 10^{-3} ampère. Préciser sa valeur arrondie au centième de seconde.

4. On sait enfin que l'énergie W dissipée dans le conducteur ohmique, exprimée en joules, entre les instants t = 0 et t = 0,23, est donnée par : $\omega = 1000\int_0^{0,23} i^2(t)dt$.

a. Préciser une primitive de la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(t) = e^{-20t}$.

b. Calculer alors ω et en donner la valeur arrondie à 10^{-3} près.