

EXERCICE 13

1. $y'' + 9y = 0$. On sait que la solution générale est de la forme :

$$f(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) \text{ avec } A, B \text{ et } t \text{ réels.}$$

2. $y'' + 9y = 8\sin t$.

a. $f(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + A\cos(3t) + \sin t$. $f'(t) = -\cos(3t) - 3A\sin(3t) + \cos t$.

$$f''(t) = 3\sin(3t) - 9A\cos(3t) - \sin t$$

Vérification :

$$y'' + 9y = 8\sin t \Leftrightarrow 3\sin(3t) - 9A\cos(3t) - \sin t + 9\left(-\frac{1}{3}\sin(3t) + A\cos(3t) + \sin t\right) = 8\sin t$$

La fonction f est donc une solution de l'équation (E).

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + A\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

b. $\Leftrightarrow \frac{-\sqrt{2}}{6} + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)A + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{3} - A + 1\right) = 0$ et

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} - A \Leftrightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$f(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{2}{3}\cos(3t) + \sin t.$$

3. $f(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{2}{3}\cos(3t) + \sin t$ donc on a : $F(t) = \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{2}{9}\sin(3t) - \cos t$ est

une primitive de f .

La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle

$$\mu = \frac{1}{\pi/3 - 0} \int_0^{\pi/3} f(x) dx = \frac{3}{\pi} \int_0^{\pi/3} f(x) dx = \frac{3}{\pi} \left[F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) \right].$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{9}\cos(\pi) + \frac{2}{9}\sin(\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{2} = \frac{-2-9}{18} = \frac{-11}{18};$$

$$F(0) = \frac{1}{9}\cos(0) + \frac{2}{9}\sin(0) - \cos 0 = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$$

$$\mu = \frac{3}{\pi} \left[F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) \right] = \frac{3}{\pi} \left[\frac{-11}{18} + \frac{8}{9} \right] = \frac{3}{\pi} \left[\frac{-11}{18} + \frac{16}{18} \right] = \frac{5}{6\pi}$$

EXERCICE 14

1. Résolution l'équation différentielle (E) : $u'' + 3600\pi^2 u = 0 \Leftrightarrow u'' + (60\pi)^2 u = 0$

Donc : $u(t) = A\cos(60\pi t) + B\sin(60\pi t)$

2. Recherche de la solution particulière f vérifiant les deux conditions initiales :

On a : $f(t) = A\cos(60\pi t) + B\sin(60\pi t)$ Donc : $f'(t) = -60\pi A\sin(60\pi t) + 60\pi B\cos(60\pi t)$

$$f\left(\frac{1}{180}\right) = 0 \Leftrightarrow A\cos\left(\frac{60\pi}{180}\right) + B\sin\left(\frac{60\pi}{180}\right) = 0 \Leftrightarrow A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad A + B\sqrt{3} = 0$$

$$f'(0) = -60\pi A \sin(60) + 60\pi B \cos(60) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 60\pi B = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow B = -\frac{1}{120}$$

En utilisant la première relation entre A et B, on trouve : $A = -B\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{120}$

Donc, la solution de (E) vérifiant les deux conditions initiales est donnée par :

$$f(t) = \frac{\sqrt{3}}{120} \cos(60\pi t) - \frac{1}{120} \sin(60\pi t)$$

3. a) On utilise la formule d'addition : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$f(t) = \frac{1}{60} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(60\pi t) - \frac{1}{2} \sin(60\pi t) \right) = \frac{1}{60} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(60\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(60\pi t) \right)$$

$$\text{Donc, on a bien : } f(t) = \frac{1}{60} \cos\left(60\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

3. b) Calcul de la valeur moyenne : Soit F une primitive de f :

$$F(t) = \frac{1}{3600} \sin\left(60\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$I_m = 90 \int_0^{1/90} f(t) dt = 90 [F(t)]_0^{1/90} = 90 \left(F\left(\frac{1}{90}\right) - F(0) \right) = 90 \left(\frac{1}{3600} \sin\left(\frac{60\pi}{90} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3600} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$I_m = 90 \left(\frac{1}{3600} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{7200} \right) = \frac{1}{40} \left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{40} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

Donc la valeur moyenne sur cet intervalle est nulle.