Corrigé exercice 28

1. $(E): y'+2y=0$ 1.a. $y=ce^{-2x}$ est la solution générale de E.

1.b. La solution f de (E) est telle que $f(0)=1$. On a donc $1=ce^{0}=c$ soit c = 1.
D'où *f* est définie par $f(x)=e^{-2x}$.

2.a. La valeur moyenne de *f* sur [0; 10] est : $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$; $\mu=\frac{1}{10-0}\int_0^{10} e^{-2x}dx$

$\mu=\frac{1}{10}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{10}$; $\mu=\frac{1}{20}\left[1-e^{-20}\right]$

2.b $\mu=\frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1} e^{-2x}dx$; $\mu=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_n^{n+1}$ $\mu=\frac{-1}{2}\left[e^{-2(n+1)}-e^{n}\right]$;
$\mu=\frac{1}{2}\left[e^{-2n}-e^{-2n}e^{-2}\right]$

$\mu=\frac{1}{2}e^{-2n}\left(1-e^{-2}\right)$

3. $U_n=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$, $U_0=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$; $U_1=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2}$; $U_2=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-4}$

3.b. Pour montrer que (Un) est une suite géométrique il suffit de montrer qu'il existe un réel non nul
que tel que $U_{n+1} = q\, U_n$.
$U_n=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$; $U_{n+1}=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2(n+1)}$; $U_{n+1}=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}\times e^{-2}$;
$U_{n+1}=U_n\times e^{-2}$.

Donc (Un) est une suite géométrique de premier terme $U_0=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$ et de raison e^{-2}

3.c $U_0+U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+..........U_{n-1}+U_n=U_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .On a donc

$$U_0+U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+..........U_{n-1}+U_n=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)\times\frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}.$$

$$U_0+U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+..........U_{n-1}+U_n=\frac{1}{2}\times\left(1-e^{-2(n+1)}\right)$$