Problème2

Partie A : Etude graphique et détermination d'une fonction

1. On lit : $f(0)=4 \; f(-1)=2$

2. Graphiquement, on lit : $f(x)<0$ pour $x<x_0$ et pour $x>x_1$; $f(x)>0$ pour $x_0<x<x_1$

3. a) $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 0. Cette droite est T, elle est horizontale, donc $f'(0)=0$.

b) f' est positive quand f est croissante et négative quand f est décroissante.
On lit donc : $f'(x)$ est positive sur $[-1;0]$; $f'(x)$ est négative sur $[0;2]$.

4. $f(x)=(x+a)e^{-x}+bx^2+3$ et $f'(x)=e^{-x}-(x+a)e^{-x}+2bx$

Donc $f(0)=ae^0+3=2$, donc $a+3=4 \Leftrightarrow a=4-3=1$.

$f(-1)=(-1+a)e^{-1}+b+3=2 \;\; \Leftrightarrow (-1+1)e^{-1}+b+3=2 \Leftrightarrow 0+b=2-3 \Leftrightarrow b=-1$.

On peut aussi vérifier avec $f'(0)$. Donc $f'(0)=e^0-(0+1)e^0+2b=1-1+2b\times 0=0$

$f(x)=(x+1)e^{-x}-x^2+3$

Partie B : Etude de la fonction f sans utilisation graphique

1. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$; et : $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2+3=-\infty$;

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \quad (-\infty-\infty)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$, car $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2+3=-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{-x}-x^2+3\right)="0-\infty"=-\infty$

3. a) En se servant des formules : on a : $f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}-2x=-x(e^{-x}+2)$

b) Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $e^{-x}>0$ et $e^{-x}+2>0$ donc $f'(x)=-x(e^{-x}+2)$ est du signe de $-x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		4		$-\infty$

4. a) Sur [1 ; 2], la fonction f est dérivable et strictement décroissante de $f(1)=2e^{-1}+2\approx 2,74$ à $f(2)=3e^{-2}-1\approx -0,59$ et $0\in[f(2);f(1)]$. Donc il existe donc une unique solution de l'équation $f(\alpha)=0$ sur l'intervalle [1 ; 2].

4. b) On procède par encadrements successifs : $1<\alpha<2$: $f(1,5)\approx 1,37$ donc $1,5<\alpha<2$; $f(1,8)\approx 0,22$ donc $1,8<\alpha<2$; $f(1,9)\approx -0,18$, donc $1,8<\alpha<1,9$. $f(1,8)\approx 0,03$ donc $1,85<\alpha<1,9$; donc $1,85<\alpha<1,86$

Partie C : Calcul d'une aire

1. a) G est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut (on utilise les formules) :

$G'(x)=-1\times e^{-x}-(-x-2)e^{-x}=(-1+x+2)e^{-x}=(x+1)e^{-x}=g(x)$

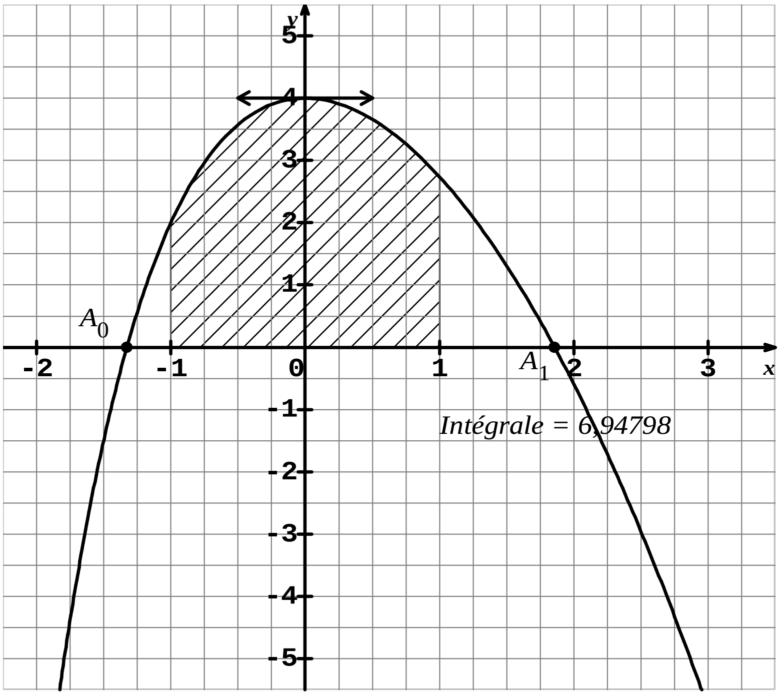
Donc G est une primitive de g sur $\mathbf{R}$.

1. b) On en déduit que la fonction $F(x)=(-x-2)e^{-x}-\dfrac{x^3}{3}+3x$ est une primitive de f sur $\mathbf{R}$.

2. L'unité graphique est de 2 cm, donc une unité d'aire correspond à 4 cm². De plus, f est positive sur [-1 ; 1]. Donc l'aire A est donnée par : $A=4\int_{-1}^{1}f(x)dx=4\left[F(x)\right]_{-1}^{1}=4\left(F(1)-F(-1)\right)$

Or, $F(1)=(-1-2)e^{-1}-\dfrac{1^3}{3}+3=-3e^{-1}-\dfrac{1}{3}+3=-3e^{-1}+\dfrac{8}{3}$ et $F(-1)=(+1-2)e^{1}+\dfrac{1^3}{3}-3=-e+\dfrac{1}{3}-3=-e-\dfrac{8}{3}$

D'où $A=4\left(F(1)-F(-1)\right)=4\left(-3e^{-1}+\dfrac{8}{3}-\left(-e-\dfrac{8}{3}\right)\right)=4\left(\dfrac{16}{3}-3e^{-1}+e\right)cm^2$.


y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-2
-1
0
1
2
3
A0
A1
Intégrale = 6,94798