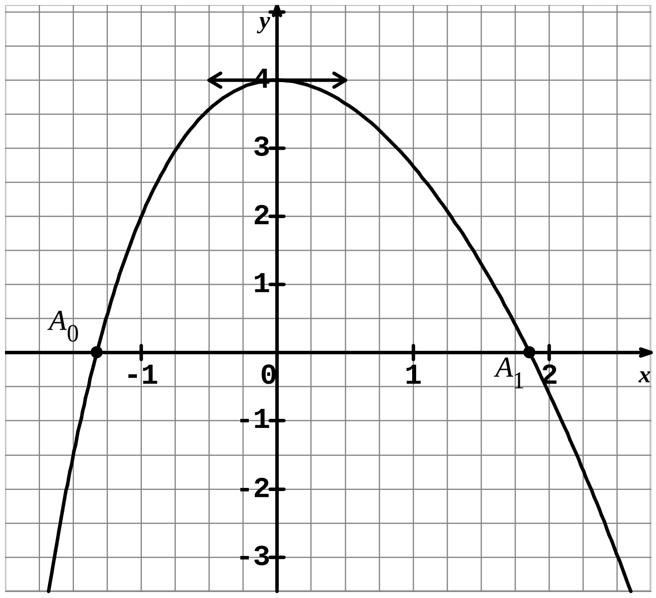
➢ ***Problème 2***

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 2 cm. La représentation graphique C_f d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ainsi qu'une droite T sont tracées dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan ci-dessous. La courbe C_f passe par les points de coordonnées $(-1;2)$ et $(0;4)$.

La droite T, parallèle à l'axe des abscisses, est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

Partie A : étude graphique



1. Donner les valeurs des nombres réels $f(0)$ et $f(-1)$.
2. Sachant que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points A_0 et A_1 d'abscisses respectives x_0 et x_1 avec $x_0 < x_1$, préciser à l'aide du graphique le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Déterminer graphiquement $f'(0)$.
   b) Déterminer par lecture graphique le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-1;2]$.
4. On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x, on ait : $f(x) = (x+a)e^{-x} + bx^2 + 3$.
   En utilisant les résultats de la question **1.**, déterminer les nombres réels a et b.

Partie B : Etude de la fonction f sans utilisation graphique

On admet maintenant que la fonction f est définie sur í par : $f(x) = (x+1)e^{-x} - x^2 + 3$

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
2. En remarquant que $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} - x^2 + 3$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. a) Montrer que pour tout nombre réel, $f'(x) = -x(e^{-x} + 2)$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f.
4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;2]$.
   Cette solution est l'abscisse x_1 du point A_1 définie dans la partie A question 2.
   b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du réel x_1.

Partie C : Calcul d'une aire

1. a) On considère les fonctions g et G définies sur **R** par $g(x) = (x+1)e^{-x}$ et $G(x) = (-x-2)e^{-x}$.
   Démontrer que G est une primitive de la fonction g sur **R**.
   b) En déduire une primitive F de la fonction f sur **R**.
2. On désigne par P la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$. On appelle A la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie P.
   Calculer la valeur exacte de A, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.