

➤ Problème 2

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (L'unité graphique est 2 cm). Le but du problème est l'étude

de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2 \ln x}{x}$ puis de calculer une aire.

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 4 + 2 \ln x$.

1. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g .
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g . (On ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$.)
3. a. Démontrer que sur l'intervalle $[1; 2]$ l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α .
b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α .
4. Dédire de ce qui précède le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x , dans l'intervalle $]0; +\infty[$.



II) Etude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?
 2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Démontrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C_f ?
 - c. Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe C_f et à la droite D .
 - d. Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite D .
3. Etude des variations de f .
- a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f . Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie I.
 - b. En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction f
4. On note T la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse e^2 . Montrer que T est parallèle à l'asymptote D .
5. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la droite D , la tangente T et la courbe C_f à l'aide de l'étude précédente.
- (On prendra $f(\alpha) = 1,25$)

III) Calcul d'une aire

On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction H par : $H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2 \ln x - (\ln x)^2$

1. Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Soit E la région du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
 - a. Hachurer la région E sur votre figure.
 - b. On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région E . Déterminer la valeur exacte de S .
 - c. Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2 .