➢ ***Problème 4***

Sur la feuille annexe,qui doit être remise avec la copie, on donne, dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe représentative C_f d'une fonction *f* définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

Partie A : détermination de la fonction f

On suppose que la courbe passe par le point A de coordonnées $\left(3;-\frac{7}{2}+3\ln 2\right)$.

La droite D d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe C_f . On note f' la fonction dérivée de *f* .

1. Quelle est la valeur exacte de $f(3)$?
2. Donner sans justification la limite de la fonction *f* en 2.
3. On suppose que, pour tout réel *x* de l'intervalle $]2;+\infty[$, $f(x)=ax-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$

   En utilisant la réponse de la question 1, déterminer algébriquement le nombre *a*.

Partie B : étude de la fonction f

On admet que la fonction *f* est définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$

1. a. Retrouver par le calcul la limite de la fonction *f* en 2.

   b. Montrer que, pour tout *x* réel de l'intervalle $]2;+\infty[$ $f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

   c. En déduire la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x-5$ est une asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$.

   Tracer Δ sur la feuille annexe.

3. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel *x* de l'intervalle $]2;+\infty[$ $f'(x)=\frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}$

   b. étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

4. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2,1;3]$ et une solution unique β dans l'intervalle $[9;10]$.

   b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions α et β .

Partie C : calcul d'aire

c. On considère les fonctions *h* et *H* définies sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par $h(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ et $H(x)=(x-1)\ln(x-1)-(x-1)\ln(x-2)$.

c. Montrer que la fonction *H* est une primitive de la fonction *h* sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

b. En déduire une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

2. On considère le domaine *D* du plan compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 9$.

c. Hachurer le domaine *D* sur le graphique de la feuille annexe.

b. On note *A* la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine *D*. Exprimer *A* sous la forme d'une intégrale.

c. Calculer la valeur exacte de *A*, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.