➢ ***Problème 5 (11 points)***

On note I l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels.

On considère la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par : $f(x)=x^2+ax+b-2\ln x$.

On note $\boldsymbol{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Soit A le point de coordonnées (1 ; -3).

Calculer les valeurs respectives des nombres réels a et b pour que, d'une part la courbe $\boldsymbol{C}_f$ passe par le point A et que, d'autre part, la tangente à cette courbe au point A admette un coefficient directeur égal à 0.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudiera la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par : $f(x)=x^2-4-2\ln x$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

   b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\boldsymbol{C}_f$?

2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel de I, on a $f(x)=x\left(x-\frac{4}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)$.

   b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f puis montrer que, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

4. Étudier le signe de la fonction f' sur I et dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.

5. Déterminer le signe de $f(x)$ quand le nombre réel x appartient à l'intervalle $[1;2]$.

6. Tracer la courbe $\boldsymbol{C}_f$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie C

Soit H la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I, par : $H(x)=x\ln x-x$.

1. Calculer $H'(x)$ où H' désigne la fonction dérivée de H.
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur I.
3. On appelle Δ la partie du plan limitée par la courbe $\boldsymbol{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

   Hachurer Δ. Calculer la valeur exacte de l'aire de Δ en unités d'aire, puis en cm².