

➤ **Corrigé Problème 8**

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

$f(1)=1$; $f'(1)=1$ puisque le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est égal à 1
 $f'(2)=0$, puisque la tangente au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses

2. $f(x) = a \ln x + bx + \frac{c}{x}$; $f'(x) = \frac{a}{x} + b - \frac{c}{x^2}$.

3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a , b et c

$$f(1) = a \ln 1 + b \times 1 + \frac{c}{1} = b + c ; f'(1) = \frac{a}{1} + b - \frac{c}{1^2} = a + b - c$$

$$f'(2) = \frac{a}{2} + b - \frac{c}{2^2} = \frac{a}{2} + b - \frac{c}{4} = \frac{2a + 4b - c}{4}.$$

4. $f(1)=1 \Leftrightarrow b+c=1$; $f'(1)=1 \Leftrightarrow a+b-c=1$ $f'(2)=0 \Leftrightarrow \frac{2a+4b-c}{4}=0 \Leftrightarrow 2a+4b-c=0$

et on obtient le système
$$\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ 2a+5b=1 \end{cases} \times 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=2-2b=2-2(-3)=2+6=8. \\ c=1-b=1-(-3)=1+3=4 \end{cases}$$

5. $f(x) = 8 \ln x - 3x + \frac{4}{x}$

B.

1. $f(x) = x \left(8 \frac{\ln x}{x} - 3 + \frac{4}{x^2} \right)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(8 \frac{\ln x}{x} - 3 + \frac{4}{x^2} \right) = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

2. $f(x) = \frac{1}{x} (8x \ln x - 3x^2 + 4)$: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -3x^2 = 0$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (8x \ln x - 3x^2 + 4) = 4$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$$

3.

a. $f'(x) = \frac{8}{x} - 3 - \frac{4}{x^2} = \frac{8x - 3x^2 - 4}{x^2}$, or $(3x-2)(2-x) = 6x - 3x^2 - 4 + 2x = -3x^2 + 8x - 4$, donc

$$f'(x) = \frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$$

x	0	$2/3$		2	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$		$+\infty$		0,76	1,54	$-\infty$

b. La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$, elle est aussi strictement décroissante sur l'intervalle $[4; 5] \subset [2; +\infty[$, or $f(4) \approx 0,09$ et $f(5) \approx -1,324$ de plus $0 \in [f(4); f(5)]$, donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$ et $\alpha \in [4; 5]$.

c. à l'aide de la calculatrice on a : $f(4,07) = 0,0019$ et $f(4,08) \approx -0,01$, donc $4,07 < \alpha < 4,08$.

C.

$$1. F(x) = (8x + 4) \ln x - 8x - \frac{3}{2}x^2$$

$F'(x) = 8 \ln x + \frac{(8x + 4)}{x} - 8 - 3x = 8 \ln x + 8 + \frac{4}{x} - 8 - 3x = 8 \ln x - 3x + \frac{4}{x} = f(x)$, par conséquent $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.

2.



$$A = \left(\int_1^3 f(x) dx \right)_{u.a} = 4 \times [F(x)]_1^3 = 4[F(3) - F(1)]$$

$$F(3) = (8 \times 3 + 4) \ln 3 - 8 \times 3 - \frac{3}{2} \times 9 = 28 \ln 3 - \frac{75}{2} \text{ et } F(1) = (8 \times 1 + 4) \ln 1 - 8 - \frac{3}{2} = 0 - \frac{19}{2}$$

$$A = 4 \left[28 \ln 3 - \frac{75}{2} + \frac{19}{2} \right] = 4 \left[28 \ln 3 - \frac{56}{2} \right] = 4(28 \ln 3 - 28) \text{ cm}^2 \approx 11,05 \text{ cm}^2$$