

PROBLEME 1. (10 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - 4 \ln x$

On appelle C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1/

a) Déterminer la limite en 0 de la fonction f . Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

b) En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x \left(1 - \frac{1}{x} - 4 \frac{\ln x}{x} \right)$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2/ On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle I .

Calculer $f'(x)$, étudier son signe puis construire le tableau de variation de f .

3) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en son point A d'abscisse 1.

4/ Calculer $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ puis en donner les valeurs approchées à 10^{-1} près.

En utilisant les résultats précédents et le tableau de variations de la fonction f .

5/ Construire dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe C , et la tangente T .

 **Fomesoutra.com**
ça soutra !
Docs à portée de main

6/ Soit F la fonction définie sur l'intervalle I par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4x \ln x$

Démontrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I .

7/ On appelle $S = 4 \times [F(6) - F(4)]$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.

a) Construire dans le même repère les droites d'équations : $(\delta_1) : x = 4$ et $(\delta_2) : x = 6$

b) Calculer la valeur exacte en cm^2 de S , puis une valeur approchée au mm^2 près.

PROBLEME-2. (11 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - 2 \ln x$

On appelle C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1) a) Déterminer la limite en 0 de la fonction f . Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

b) En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x \left(1 - \frac{1}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right)$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle I .

Calculer $f'(x)$, étudier son signe puis construire le tableau de variation de f .

3) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en son point A d'abscisse 1.

4) Calculer $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ puis en donner les valeurs approchées à 10^{-1} près.

En utilisant les résultats précédents et le tableau de variations de la fonction f .

a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution autre que 1.

b) Donner un encadrement de cette solution par deux entiers consécutifs.

5) Construire dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe C , et la tangente T .

6) Soit F la fonction définie sur l'intervalle I par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2x \ln x$

a) Démontrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I .

b) On appelle $S = 4[F(6) - F(4)]$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.

Construire dans le même repère les droites d'équations : $(\delta_1) : x = 4$ et $(\delta_2) : x = 6$

Calculer la valeur exacte en cm^2 de S , puis une valeur approchée au mm^2 près.

Problème 3

Partie A

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation : $2X^2 - 5X + 2 = 0$.
- b. En déduire les solutions, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, de l'équation $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$. On pourra poser $X = \ln x$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$. Soit C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Etudier la limite de f en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
- b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra factoriser par $\ln x$).
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4\ln x - 5}{x}$.
- b. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- c. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On pourra remarquer que la fonction f s'annule en $\sqrt{e}$ et en e^2 .
3. Donner une équation de la tangente T et la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$.
4. Tracer la courbe C et la tangente T dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
5. a. Hachurer le domaine A du plan situé en dessous de l'axe (Ox) et compris entre la courbe C et l'axe (Ox) .
- b. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = x(2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



PROBLEME 4

Partie A : Etude du signe de $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$. ($\ln x$ désigne le logarithme népérien de x)

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g . (Les limites ne sont pas demandées). Calculer $g(1)$.
3. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

- 1.a Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 1.b Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) .
Y a-t-il une autre asymptote à (C) ? Si oui, donner son équation.
- 1.c Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
- 1.d En utilisant les résultats précédents, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 1.e Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe (C) .
Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) .
- 1.f Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C) et les droites (D) .

Correction

Problème 3

1.a. $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$; $x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$. $S = \{1/2; 2\}$

1.b sur l'intervalle $]0; +\infty[$, résolvons l'équation $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$. Posons $X = \ln x$. L'équation devient $2X^2 - 5X + 2 = 0$. On a vu que $X = 1/2$ ou $X = 2$. $\ln x_1 = 1/2 \Leftrightarrow x_1 = e^{1/2} = \sqrt{e}$; $\ln x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = e^2$

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$

1.a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2)$ or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2(\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -5\ln x = +\infty$

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$. La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x (2(\ln x) - 5) + 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2(\ln x) - 5) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3.a f est dérivable sur $]0; +\infty[$; $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$ $f'(x) = 2 \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - 5 \times \frac{1}{x} = \frac{4\ln x}{x} - \frac{5}{x}$.

(car $(u^2)' = 2u'u$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$) pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4\ln x - 5}{x}$.

3.b variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4\ln x - 5}{x}$ $x \in]0; +\infty[$, donc $x > 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\ln x - 5 = 0 \Leftrightarrow 4\ln x = 5 \Leftrightarrow \ln x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = e^{5/4}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4\ln x - 5 > 0 \Leftrightarrow 4\ln x > 5 \Leftrightarrow \ln x > \frac{5}{4} \Leftrightarrow x > e^{5/4}$

$f(e^{5/4}) = 2(\ln e^{5/4})^2 - 5\ln(e^{5/4}) + 2 = 2(5/4 \ln e)^2 - 5 \times \frac{5}{4} \ln e + 2$

$= 2 \times \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 2 = \frac{25 - 50 + 16}{8} = -\frac{9}{4}$

x	0	$e^{5/4}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$ ↘ -9/4 ↗ $+\infty$	

x	0	$\sqrt{e}$	e^2	$+\infty$
$f(x)$		+ 0 -	0 +	

c. d'après 1.b, on a : $f(x) = 0$ si $x = \sqrt{e}$ ou $x = e^2$

En regardant le tableau de variation, on peut en déduire le signe de f sur $]0; +\infty[$.

$f(x) > 0$ pour $x \in]0; \sqrt{e}[\cup]e^2; +\infty[$; $f(x) < 0$ pour $x \in]\sqrt{e}; e^2[$; $f(x) = 0$ pour $x = \sqrt{e}$ et $x = e^2$.

3. Equation de la tangente T à la tangente à la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$:

$y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$;

$f'(\sqrt{e}) = \frac{4\ln(\sqrt{e}) - 5}{\sqrt{e}} = \frac{4 \times 1/2 - 5}{\sqrt{e}} = -\frac{3}{\sqrt{e}}$;

$f(\sqrt{e}) = 2\left(\ln(\sqrt{e})\right)^2 - 5\ln(\sqrt{e}) + 2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} + 2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2$;

$= \frac{-4}{2} + 2 = 0$

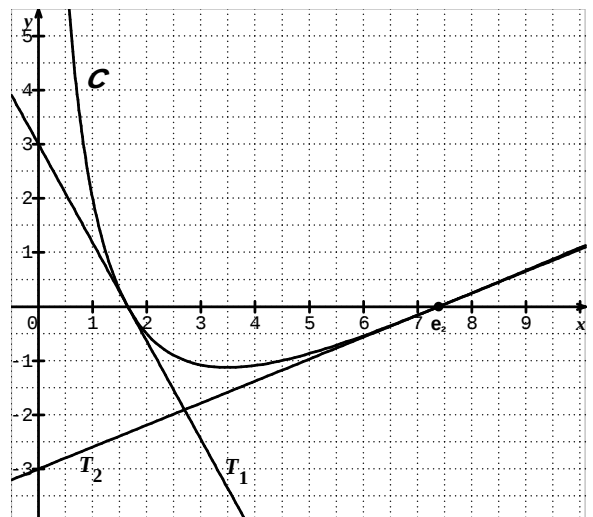
$y = \frac{-3}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e}) = \frac{-3}{\sqrt{e}}x + 3$

donc (T) : $y = \frac{-3}{\sqrt{e}}x + 3$.

5.a. voir courbe ci-contre

b. Calculons $F'(x)$. $F(x) = 2x(\ln x)^2 - 9x \ln x + 11x$.

$F'(x) = 2(\ln x)^2 + \frac{4 \times x \times \ln x}{x} - 9 \ln x - 9x \times \frac{1}{x} + 11$



$$F'(x) = 2(\ln x)^2 + 4\ln x - 9\ln x - 9 + 11 \text{ d'où } F'(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = f(x),$$

F est bien une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

$$F(e^2) = 2e^2 (\ln e^2)^2 - 9e^2 \ln e^2 + 11e^2 = 2e^2 (2\ln e)^2 - 18e^2 \ln e + 11e^2 = 8e^2 - 18e^2 + 11e^2 = -e^2$$

$$F(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} (\ln \sqrt{e})^2 - 9\sqrt{e} \ln \sqrt{e} + 11\sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2} - \frac{9}{2}\sqrt{e} + 11\sqrt{e} \\ = -4\sqrt{e} + 11\sqrt{e} = 7\sqrt{e} \quad \text{donc } F(\sqrt{e}) - F(e^2) = 7\sqrt{e} - (-e^2) = 7\sqrt{e} + e^2$$

Exercice 4

Partie A : Etude du signe de $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

1. La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$: $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$

donc la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2. Tableau de variation de la fonction g .

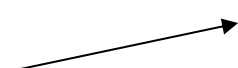
$$3. g(1) = 1 - 1 + 2\ln 1 = 0$$

4. Si $x \leq 1$, alors $g(x) \leq g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x) \leq 0$

Si $x \geq 1$, alors $g(x) \geq g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x) \geq 0$

conclusion : sur $]0; 1]$, $g(x) \leq 0$ et sur $[1; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

On peut résumer tout cela par le tableau de signe suivant :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		- 0 +	

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.



$$1.a \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad (\text{voir formulaire}) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2} = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

De la dernière limite, on en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

$$1.b f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln x}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \text{ donc la droite (D) d'équation } y = x - 1 \text{ est asymptote}$$

oblique à (C) au voisinage de $+\infty$. Il y a une autre asymptote à la courbe (C) (voir 1.a.),

c'est la droite d'équation $x = 0$.

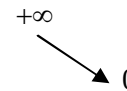
$$1.c f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} \quad ; \quad f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = 1 - \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = 1 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \quad ; \quad f'(x) = \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} \quad ; \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

1.d $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ car $x^3 > 0$ sur $]0; +\infty[$ et le signe de $g(x)$ a déjà été trouvé à la partie A : $f'(1) = 0$

1.e Soit x l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote (D) et de la courbe (C), on a : $f(x) = x - 1$ soit $\ln x = 0$, par conséquent $x = 1$.
l'ordonnée de ce point est $f(1) = 0$.

La courbe (C) et la droite (D) se coupent au point de coordonnées

$(1; 0)$. $f(x) - (x - 1)$ est du signe de $-\ln x$ (voir Partie B 1.b)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		 	

Etudions le signe de $-\ln x$:

$-\ln x \geq 0$ si $\ln x \leq 0$ soit $\ln x \leq \ln 1$ d'où $x \leq 1$

sur $]0; 1]$, $-\ln x \geq 0$ donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D)

sur $[1; +\infty[$, $-\ln x \leq 0$ donc la courbe (C) est au dessous de la droite (D)

1. C_f voir graphique

2.a pour tout réel x on a :

$$H'(x) = \frac{1}{x^2} (1 + \ln x) - \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1 + \ln x - 1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} = h(x)$$

donc H est une primitive de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$

$$2.b H(\sqrt{e}) = \frac{-1}{\sqrt{e}} \left(1 + \ln \sqrt{e} \right) = \frac{-1}{\sqrt{e}} \left(1 + \frac{1}{2} \ln e \right) = \frac{-3}{2\sqrt{e}} \quad H(1) = -(1 + \ln 1) = -1,$$

$$H(\sqrt{e}) - H(1) = \frac{-3}{2\sqrt{e}} + 1.$$

