Exercice 1 (6 points)

Partie A

Cet exercice est un test vrai - faux.

Pour chacune des quatre propositions, relever le numéro de la proposition et dire si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste rapporte 1 *point ; une réponse fausse enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif la note attribuée à la partie A est ramenée à* 0.

Un groupe d'élèves décide de faire des gâteaux et de les vendre pour récolter de l'argent pour partir en voyage scolaire. Ils pensent confectionner des gâteaux au yaourt et des gâteaux au chocolat, et les vendre respectivement 6 € et 8 € pièce. Ils disposent en quantités nécessaires des yaourts, du chocolat, du beurre, de la levure et de l'huile, mais n'ont que 4,8 kg de farine, 5,4 kg de sucre et 150 œufs .
La préparation d'un gâteau au yaourt nécessite 240 g de farine, 240 g de sucre et 3 œufs.
La préparation d'un gâteau au chocolat nécessite 80 g de farine, 150 g de sucre et 6 œufs. Les élèves notent x le nombre de gâteaux au yaourt fabriqués, et y le nombre de gâteaux au chocolat fabriqués. Ils supposent que tous les gâteaux fabriqués seront vendus. Ils souhaitent gagner le plus d'argent possible.
Ils réalisent un graphique permettant de traiter ce problème. Ce graphique est donné dans l'annexe.

Les points A, B, C et Dont pour coordonnées respectives $(0;25)$, $(10;20)$, $\left(\frac{120}{7};\frac{60}{7}\right)$ et $(20;0)$.

Les couples d'entiers $(x;y)$ respectant les contraintes sont les coordonnées des points à coordonnées entières situés à l'intérieur du pentagone OABCD ou sur ses côtés.
La droite d'équation $6x+8y=160$ est tracée en pointillés. Elle correspond aux cas où la recette est de160 €.

Proposition 1 : La contrainte liée à la quantité de farine disponible peut se traduire par : $3x+y\leq 60$.

Proposition 2 : La droite (BC) est associée à la contrainte liée au nombre d'oeufs.

Proposition 3 : En fabriquant 19 gâteaux au yaourt et 4 gâteaux au chocolat, toutes les contraintes sont respectées.

Proposition 4 : En respectant toutes les contraintes, le maximum d'argent gagné lors de la vente sera de 200€ .

Exercice 2

On rappelle que si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ *est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par la formule :* $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

On se propose d'étudier la capacité pulmonaire moyenne de l'être humain de 10 à 90 ans.

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle [10 ; 90] par $f(x)=\frac{110\ln(x)-220}{x}$

On admet que, pour un être humain d'âge x, en années, appartenant à l'intervalle $[10\,;90]$, sa capacité pulmonaire moyenne, en litres, peut être modélisée par $f(x)$.

Une représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.

1. Répondre avec la précision permise par la représentation graphique.

a. À quel âge la capacité pulmonaire moyenne est-elle maximale ?
Quelle est cette capacité maximale ?

b. À quels âges la capacité pulmonaire moyenne est-elle supérieure ou égale à 5 litres ?

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f .

a. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle [10 ; 90], $f'(x)=\frac{110(3-\ln(x))}{x^2}$

b. Résoudre sur l'intervalle $[10\,;90]$ l'équation $3-\ln(x)=0$.
Donner une valeur arrondie de la solution au dixième.

c. On considère sur l'intervalle $[10\,;90]$ l'inéquation $3-\ln(x)>0$.
Montrer que l'ensemble des solutions de cette inéquation est $[10;e^3]$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[10\,;90]$.

d. Indiquer comment retrouver les résultats de la question **1, donner les valeurs à** 10^{-2} **près.**

EXERCICE 3 8 points

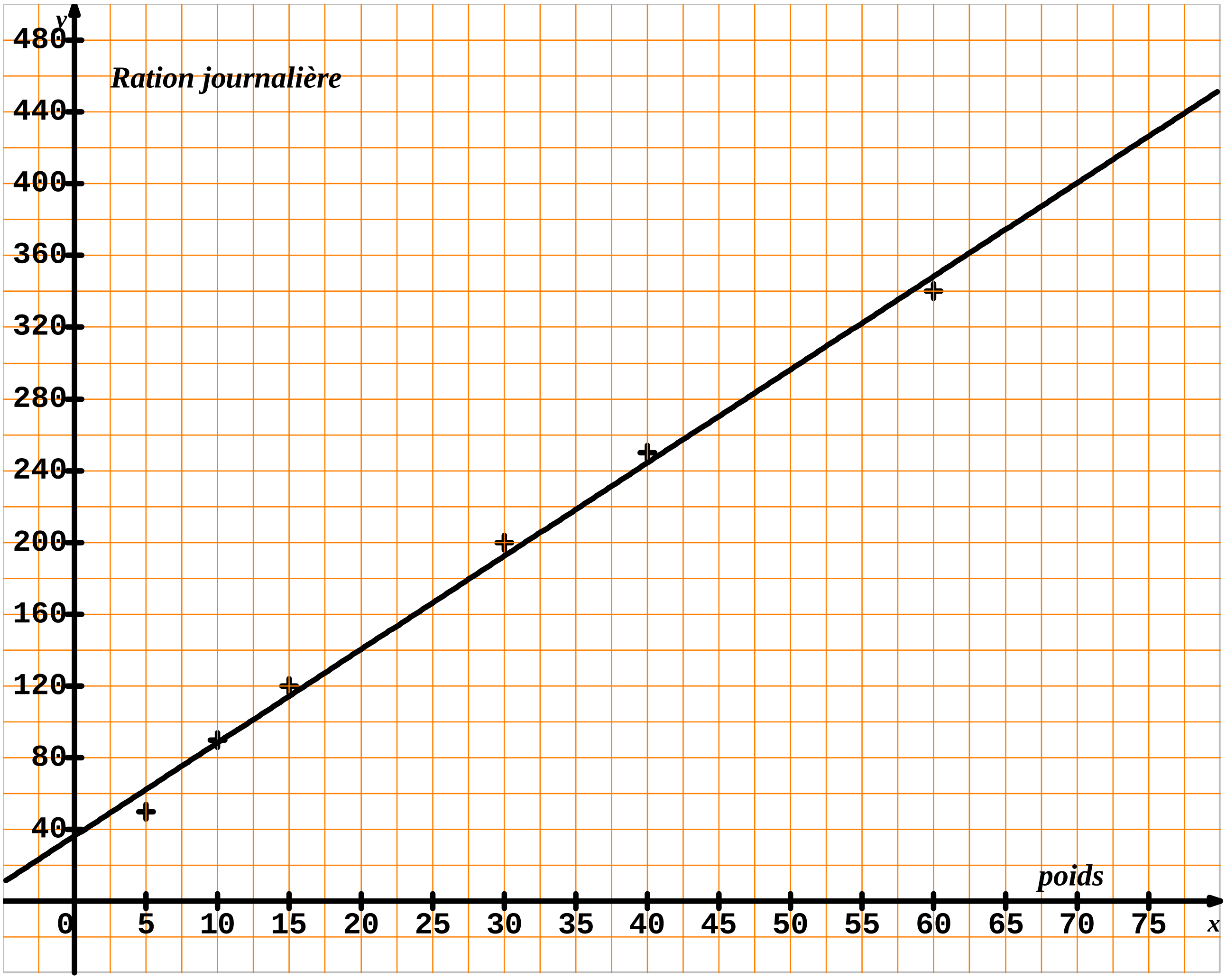
Les rations journalières conseillées sur des sacs de croquettes pour chien des marques Topdog et Friskas sont données ci-dessous.

Poids du chien x_i (kg)	5	10	15	30	40	60
Ration journalière conseillée y_i, (g)	50	90	120	200	250	340

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

1. Déterminer s'il y a proportionnalité entre le poids du chien et la ration journalière conseillée. Justifier.
2. Le chien de Julie pèse 26 kg. Julie souhaite calculer la ration journalière conseillée. Une représentation graphique du nuage de points $(x_i ; y_i)$ est donnée ci-dessous.



Julie a obtenu par la méthode des moindres carrés la droite d'ajustement de y en x,et l'a tracée. Déterminer la ration journalière conseillée pour le chien de Julie.

Partie II

Formulaire		
Suite arithmétique (u_n) de raison r	Premier terme u_1, $u_{n+1} = u_n + r$	$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = nu_1 + \frac{n(n+1)r}{2}$
Suite géométrique (u_n) de raison q	Premier terme u_1, $u_{n+1} = qu_n$	$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Le chien d'Arthur pèse 30 kg et mange des croquettes Topdog.

Arthur décide de changer pour la marque Friskas. Mais la transition doit être progressive.

Arthur suit les recommandations des deux marques et donne à son chien une ration journalière de 200 g.

Arthur choisit de donner le premier jour 20 g de croquettes Friskas, et le reste de la ration, soit 180 g, en croquettes Topdog ; puis il étudie deux programmes d'alimentation :

– premier programme : augmenter la part de croquettes Friskas de 15 g par jour.

– second programme : augmenter chaque jour de 20 %la part de croquettes Friskas présente dans la ration.
Dans les deux cas, la ration quotidienne reste au total à 200 g.
Arthur utilise un tableur pour étudier les deux programmes d'alimentation de son chien.
La feuille de calcul est donnée à la page suivante. Le format d'affichage est un format numérique à 0 décimale.

1. Premier programme

a. Donner une formule qui, entrée dans la cellule B3, permet par recopie vers le bas d'obtenir la plage de cellules B3 :B14.

b. Donner une formule qui, entrée dans la cellule C2, permet par recopie vers le bas d'obtenir la plage de cellules C2 :C14.

c. Calculer la quantité totale de croquettes Topdog que doit prévoir Arthur dans ce premier programme d'alimentation durant la période de transition.

2. Second programme

a. Une formule entrée dans la cellule D3 a permis d'obtenir la plage de cellules D3 :D16 par recopie vers le bas. Cette formule permet de limiter la ration de croquettes Friskas à 200 g.
Recopier la seule des trois formules ci-dessous qui peut convenir.

=D2 * 1,20 SI(D2 * 1,20 > 200 ; 200 ; D2 * 1,20) `= $D$2*1,2Â2`

b. Soit u la suite géométrique de premier terme $v_1 = 20$ et de raison 1,2.
Calculer la somme des treize premiers termes $S = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_{13}$.

c. Montrer que la quantité totale de croquettes Topdog utilisées pendant la période de transition dans le second programme est à l'unité près égale à 1 630 g.

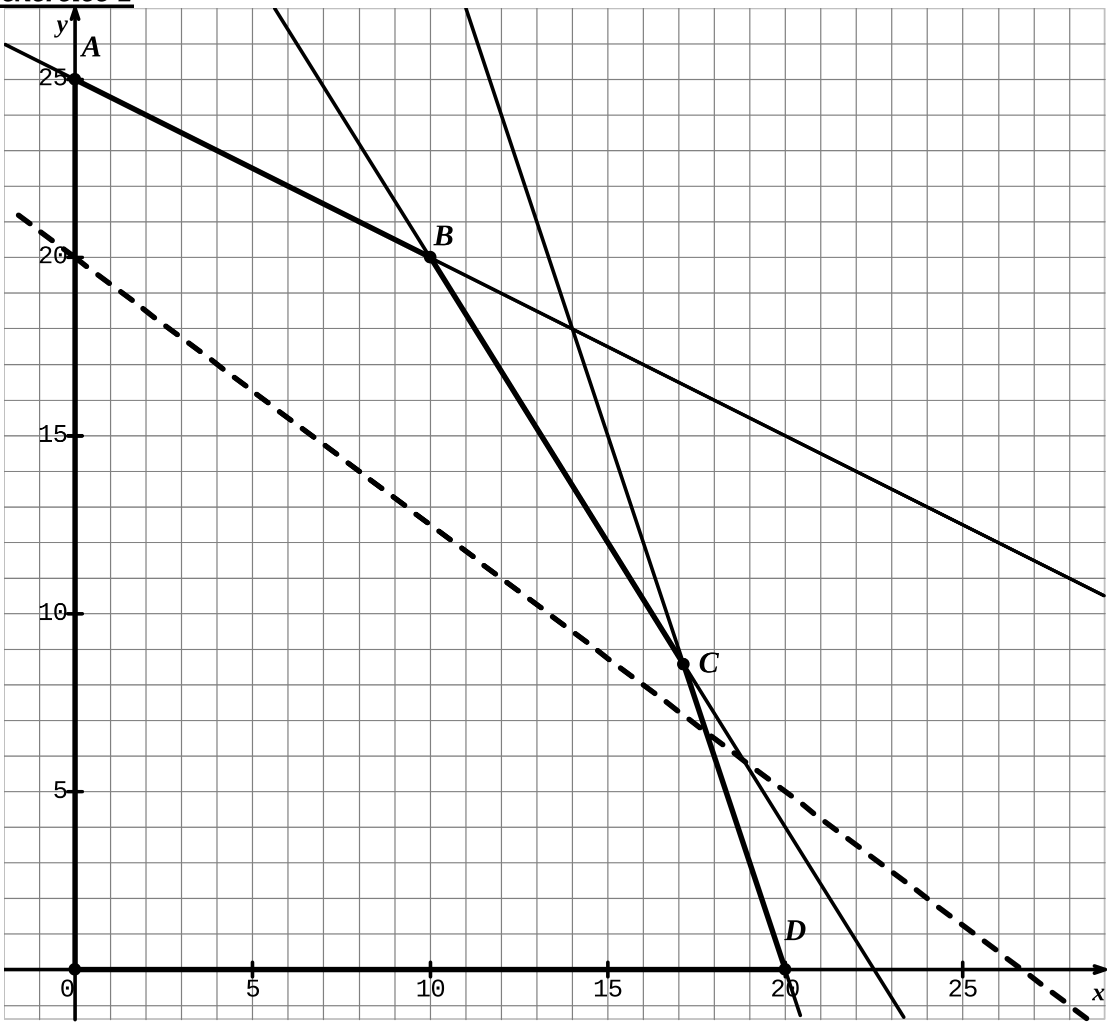
3. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Avant la période de transition, il reste à Arthur un sac de 2 kg de croquettes Topdog. Il souhaite en utiliser le plus possible durant la période de transition entre les deux marques de croquettes. Lequel des deux programmes d'alimentation Arthur choisira-t-il ? Justifier.

	A	B	C	D	E
1	**Jour**	Premier programme quantité de croquettes Friskas (g)	Premier programme quantité de croquettes Topdog (g)	Second programme Quantité de croquettes Friskas (g)	Second programme Quantité de croquettes Topdog (g)
2	**1**	20	180	20	180
3	**2**	35	165	24	176
4	**3**	50	…	29	…
5	**4**	65	…	35	…
6	**5**	80	…	41	…
7	**6**	95	…	50	…
8	**7**	110	…	60	…
9	**8**	125	…	72	…
10	**9**	140	…	86	…
11	**10**	155	…	103	…
12	**11**	170	…	124	…
13	**12**	185	…	149	…
14	**13**	200	0	178	22
15	**14**		0	200	0
16	**15**			200	0

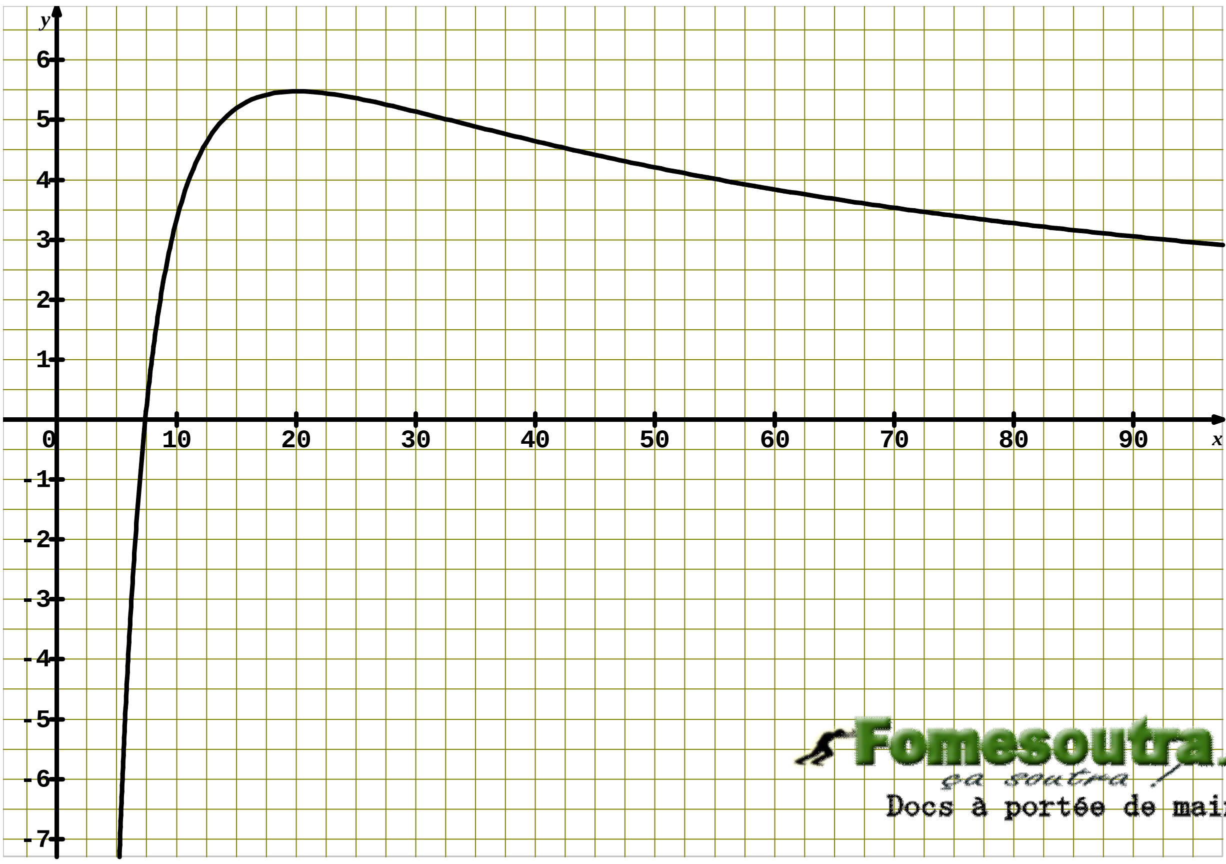
Indication de lecture : 165, le contenu de la cellule C3, est la quantité, en grammes, de croquettes Topdog présente dans la ration du second jour de transition dans le cas du premier programme d'alimentation.

Nom **:** **………………………………..** ***Prénom*** **:…………………………….**

Annexe exercice 1



Exercice 2



Correction

Exercice 1

Solution

Un groupe d'élèves décide de faire des gâteaux et de les vendre pour récolter de l'argent pour tir voyage Scolaire. Posons le problème en inéquation :

Les élèves notent x le nombre de gâteaux au yaourt fabriqués, et y le nombre de gâteaux au chocolat fabriqués. Ils pensent confectionner des gâteaux au yaourt et des gâteaux au chocolat , et le vendre Respectivement 6 € et 8 € pièce.

La droite d'équation $6x+8y=160$ correspond aux cas où la recette est de 160 € .

Ils disposent de 4,8kg soit 4800 g de farine, 5,4kg de sucre ,soit 5400g et 150 œufs .

La préparation d'un gâteau au yaourt nécessite 240 g de farine, 240 g de sucre et 3 oeufs.

La préparation d'un gâteau au chocolat nécessite 80 g de farine, 150 g de sucre et 6oeufs.

	Quantités	Farine	Sucre	Œufs	Prix
Gâteaux au yaourt	x	240	240	3	6
Gâteaux au chocolat	y	80	150	6	8
Conditions	$x \geq 0$ et $y \geq 0$	4800	5400	150	

Le tableau ci-dessus se traduit par le système d'inéquation suivante :

$$\begin{cases} 240x+80y \leq 4800 \\ 240x+150y \leq 5400 \\ 3x+6y \leq 150 \end{cases} \text{, donc en simplifiant on obtient : } \begin{cases} 3x+y \leq 60 \\ 8x+5y \leq 180 \\ x+2y \leq 50 \end{cases}.$$

Proposition 1 : La contrainte liée à la quantité de farine disponible peut se traduire par : $3x+y \leq 60$.

La proposition 1 est vraie : d'après l'énoncé : $240x+80y \leq 4800$, soit en divisant par 80 : $3x+y \leq 60$.

Donc la contrainte liée à la quantité de farine disponible se traduit par : $3x+y \leq 60$. ***VRAIE***

Proposition 2 : La droite (BC) est associée à la contrainte liée au nombre d'œufs est fausse

En effet : la contrainte liée aux œufs se traduit par $3x+6y \leq 150$, soit $x+2y \leq 50$.

Etablissons l'équation de la droite (BC) qui est de la forme $y=ax+b$

$$a=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{(60/7)-20}{(120/7)-10}=\frac{60-140}{120-70}=\frac{-80}{50}=-\frac{8}{5}$$

Les point B appartient à la droite (BC) donc les coordonnées du point B vérifient l'équation de la droite (BC) , soit $y_B=-\frac{8}{5}x_B+b \Rightarrow 20=-\frac{8}{5}\times 10+b \Rightarrow b=20+16=36$

d'où (BC) a pour équation : $y=-\frac{8}{5}x+36$, soit $8x+5y=180$, ce qui correspond à la contrainte au sucre.

Donc la droite (BC) n'est pas associée à la contrainte liée au nombre d'œufs.

Proposition 3 : En fabriquant 19 gâteaux au yaourt et 4 gâteaux au chocolat, toutes les contraintes sont respectées. ***FAUX.***

Sur le graphique , 19 gâteaux au yaourt et 4 gâteaux au chocolat correspond au point de coordonnées, (19 ; 4) , Or ce point ne se situe pas à l'intérieure du polygone OABCD ou sur ses cotés.

On peut aussi montrer qu'aucune inéquation n'est vérifiée.

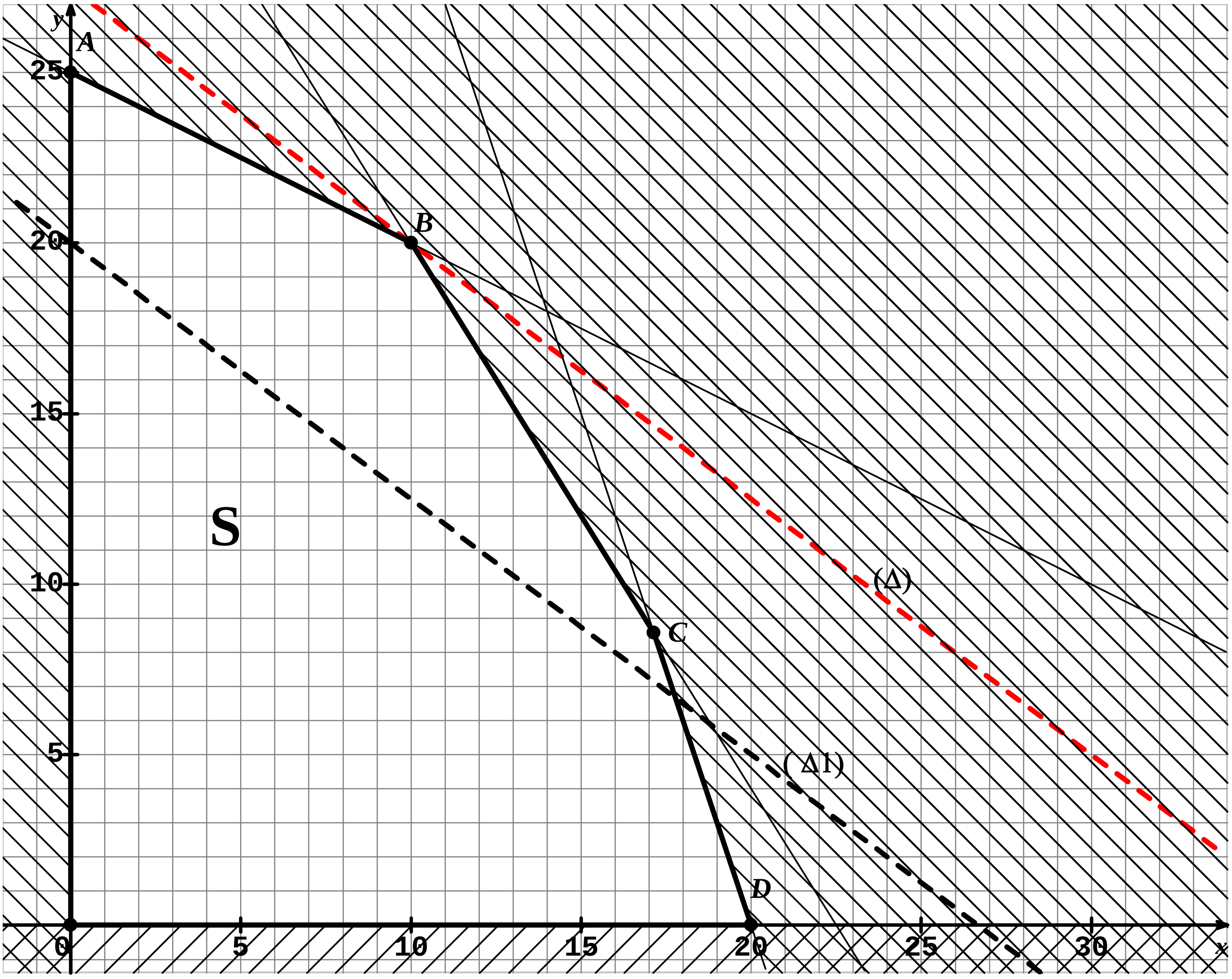
Proposition 4 : En respectant toutes les contraintes, le maximum d'argent gagné lors de la vente sera 200€ ***VRAIE***

On s'intéresse aux parallèles à la droite (Δ) d'équation : $6x+8y=160$

Graphiquement , à l'aide d'une règle posée sur la droite (Δ), on cherche la parallèle à (Δ), traversant le polygone des contraintes et coupant l'axe des ordonnées au point le plus haut , puisqu'on cherche la recette maximale .

La droite coupant l'axe des ordonnées au point le plus haut et traversant le polygone des contraintes Coupe ce dernier au point $B(10;20)$. Cela correspond à une recette de $6\times 10+8\times 20=60+160=220€$.

En respectant toutes les contraintes , la recette maximale gagnée lors de la vente sera de 220 €.



Exercice 2

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle [10 ; 90] par $f(x)=\dfrac{110\ln(x)-220}{x}$

a. à l'aide du graphique , la fonction f admet un maximum égal environ à 5,5 litres , atteint en $x=20$.
Par conséquent la capacité pulmonaire moyenne est maximale à 20 ans, elle est de 5,5 litres .

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$, revient à trouver toutes les abscisses des points sur lequel C_f se trouve au dessus de C_g . Ici la fonction g représente la droite d'équation : $y=5$.
à l'aide du graphique on lit que $f(x)\geq 5$,lorsque $x\in[14;33]$ .donc $S=[14;33]$.
Par conséquent la capacité pulmonaire moyenne est supérieure ou égale à 5 litres lorsque l'âge d'un jeune est entre 14 et 33 ans.

2. soit f' la fonction dérivée de la fonction f , cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[10;90]$

a. $f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

On pose $u(x)=110\ln x-220$; $u'(x)=\dfrac{110}{x}$ et $v(x)=x$; $v'(x)=1$

Donc $f'(x)=\dfrac{\frac{110}{x}\times x-(110\ln x-220)}{v^2(x)}=\dfrac{110-110\ln x+220}{x^2}=\dfrac{330-110\ln x}{x^2}=110\times\left(\dfrac{3-\ln x}{x^2}\right)$.

b. On résout l'équation $f'(x)=0$ sur l'intervalle $[10;90]$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=3>0\Leftrightarrow x=e^3\approx 20{,}1\in[10;90]$.

c. On résout l'inéquation $f'(x)>0$ sur l'intervalle $[10;90]$. $f'(x)>0\Leftrightarrow 3-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<3\Leftrightarrow x<e^3$.

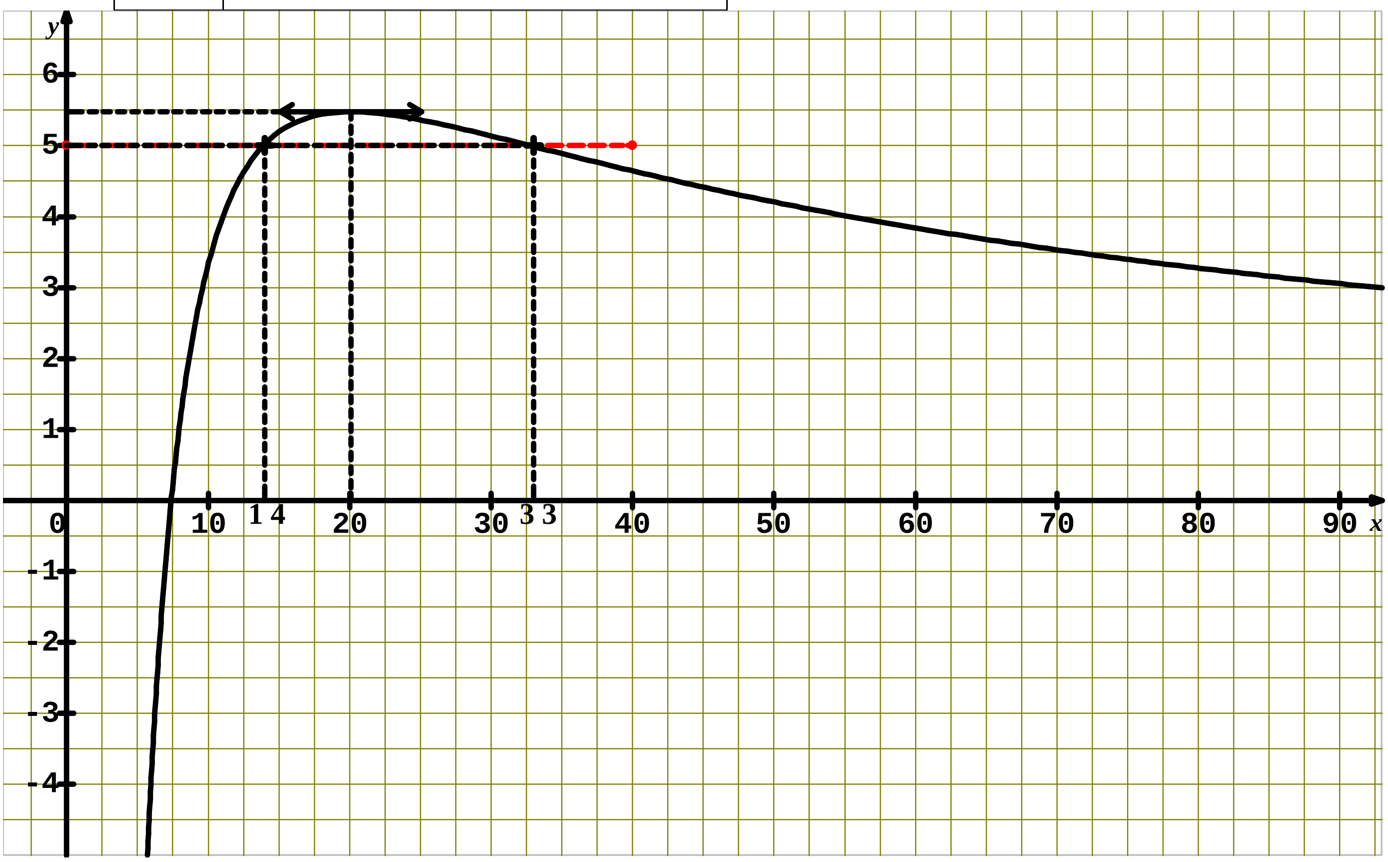
Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $[10;e^3[$.

On sait que $f'(x)=110\times\left(\dfrac{3-\ln x}{x^2}\right)$ et $\dfrac{110}{x^2}>0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $3-\ln x$

D'après ce qui précède on prouvé que $3-\ln x>0 \Leftrightarrow x<e^3$, donc $3-\ln x<0 \Leftrightarrow x>e^3$ sur $[10;90]$.

d) tableau de variations de f

x	10	e^3	90
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\dfrac{110}{e^3}$	↘



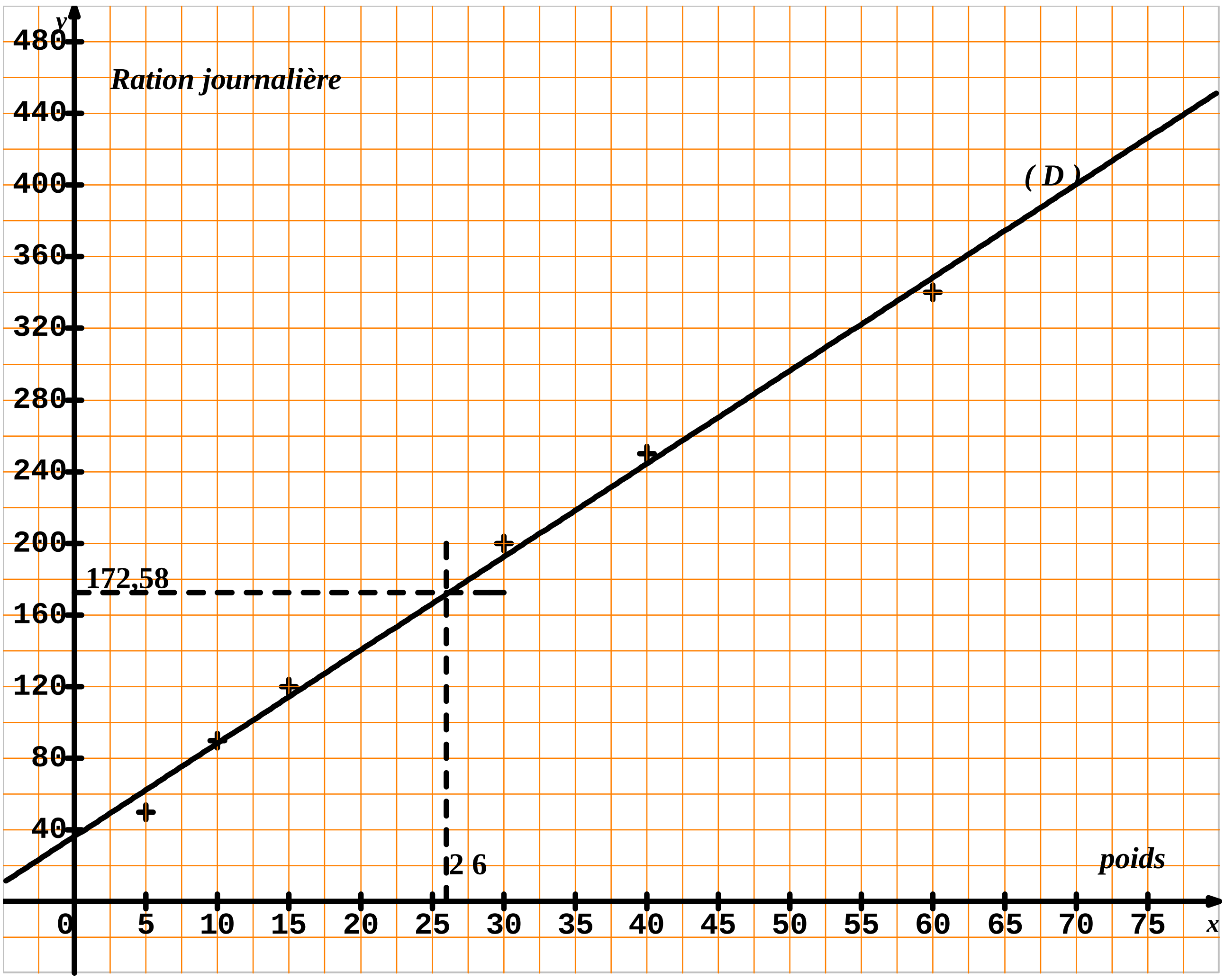
Exercice 3

Partie I

1. Il y a proportionnalité entre le poids du chien et la ration journalière lorsque les nombres de la ligne correspondant à la ration journalière d'obtiennent en multipliant ceux de la ligne correspondant au poids du chien par le même coefficient .

or $\dfrac{50}{5}=5$; $\dfrac{90}{10}=9$ et $\dfrac{120}{15}=8$ ce qui montre qu'il n'y a pas de proportionnalité entre le poids du chien et la ration journalière.

2.



On trace la droite d'équation : $x = 26$ sur le graphique , et on constate que l'ordonnée du point d'intersection avec la droite (D) est environ 173 .
On pourra à l'aide de la calculatrice trouver l'équation de la droite (D) par la méthode des moindres Carrés et on trouve : $y = 5,2x + 37,38$: puis on calcule la ration correspondante .

Partie II

On augmente la ration 15 g par jour , donc la formule à mettre dans la cellule B3 est : $:= B2 + 15$
La ration journalière est de 200g , donc il suffit de soustraire à 200 g la quantité de croquettes Friskas
Soit la formule à mettre dans la cellule C2 : $:= 200 - B2$.

c. La colonne C correspondant forment une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 180$ et de raison $r = -15$.
u_n est la quantité de croquettes donnée au nième jour .

$$Q = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{13} = 13180 + \frac{13(13+1)(-15)}{2} = 1170 .$$

La quantité de croquette Topdog utilisant le premier programme est de 1170 g .

2. second programme

a. la première et la troisième formule ne conviennent pas puisque on doit limiter la ration de croquette à 200 grammes et ces formules ne le permettent pas.
La bonne formule est la deuxième parce que elle y inclue la condition « limiter la ration à 200 g.
SI(D2 * 1,20 > 200 ; 200 ; D2 * 1,20) signifie : si $D*1,2 > 200$ veut dire que la ration dépasse les 200 grammes alors on écrit 200 sinon on écrit $D*1,2 > 200$ (valeur de la ration).

b. soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 20$ et de raison $q = 1,2$

donc on a : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = u_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, n= 13 , donc $S_{13} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{13} = 20 \dfrac{1,2^n - 1}{1,2 - 1}$

et enfin $S_{13} \approx 970$.

c. d'après la question précédente la quantité de croquettes Friskas utilisées pendant la période de transition dans le second programme est de 970 grammes.
Or la quantité totale de croquettes utilisées pendant la période de transition est $13 \times 200 = 2600\,\text{g}$
Donc la quantité de croquettes utilisées pendant la période de transition est $Q = 2600 - 970 = 1630\,\text{g}$

3. pour le premier programme , la quantité totale de croquettes Topdog utilisées est 1170
Pour le second programme , la quantité totale de croquettes Topdog utilisées est 1630.
Donc si Arthur dispose d'un sac de 2 kg de croquettes Topdog et qu'il souhaite en utiliser le plus possible Durant la période de transition entre les deux marques , alors le second programme lui convient.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	**Jour**	Premier programme quantité de croquettes Friskas (g)	Premier programme quantité de croquettes Topdog (g)	Second programme Quantité de croquettes Friskas (g)	Second programme Quantité de croquettes Topdog (g)
2	**1**	20	180-15	20	180-4
3	**2**	35	165-15	24	176-5
4	**3**	50	150-15	29	171-6
5	**4**	65	135-15	35	165-6
6	**5**	80	120-15	41	159-9
7	**6**	95	105-15	50	150-10
8	**7**	110	90-15	60	140-12
9	**8**	125	75-15	72	128-14
10	**9**	140	60-15	86	114-17
11	**10**	155	45-15	103	97-21
12	**11**	170	30-15	124	76-25
13	**12**	185	15-15	149	51-29
14	**13**	200	0	178	22-22
15	**14**		0	200	0
16	**15**		0	200	0