EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

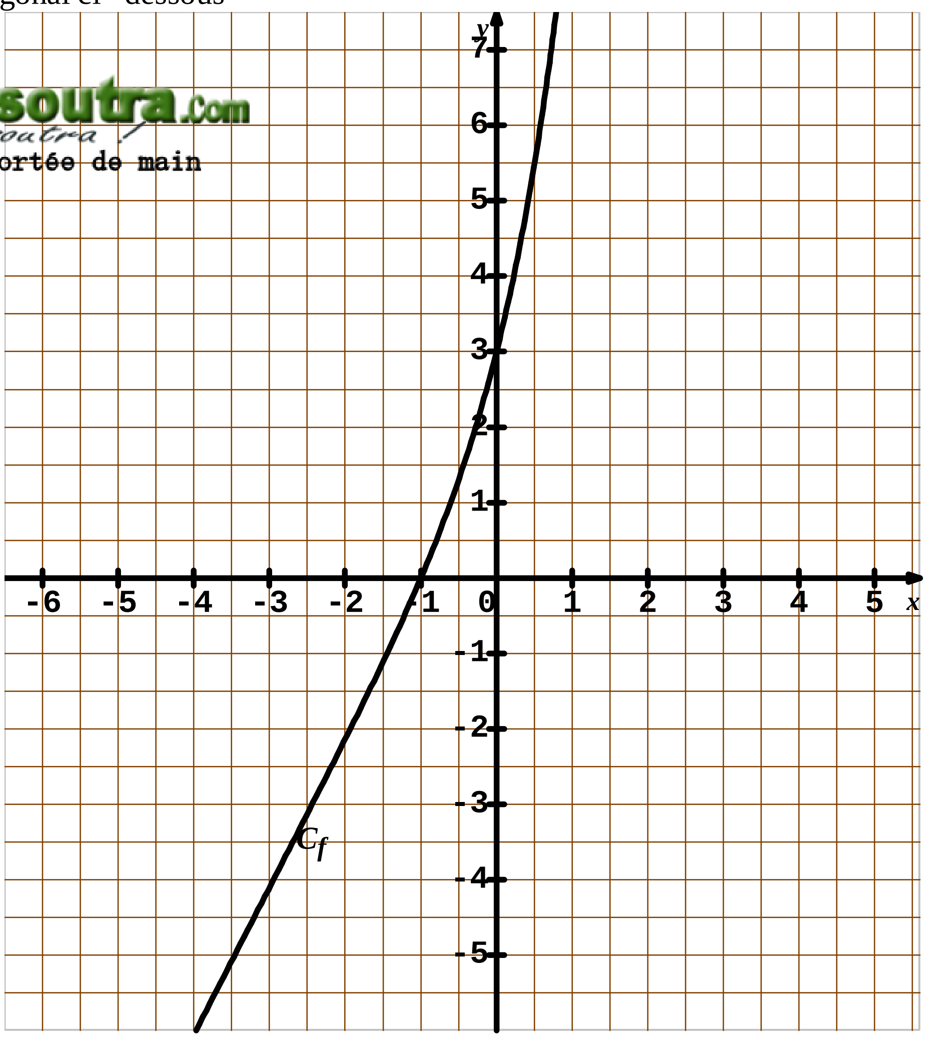
A. Résolution d 'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'-y=e^{x}-2x$ où la fonction inconnue y, de la variable réelle f est définie et dérivable sur R, et y' désigne sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur R de l équation différentielle $(E_0): y'-y=0$
2. Soit g la fonction définie sur A par $g(x)=xe^{x}+2x+2$.
   Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0)=3$.

B. Elude d'une fonction

Soit la fonction définie sur R par $f(x)=(x+1)e^{x}+2x+2$. Sa courbe représentative est donné dans un repère orthogonal ci –dessous



1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2. Pour cette question, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
   La courbe admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

Réponse A	*Réponse B*	*Réponse C*
$y=x+1$	$y=2+2x$	$y=2$

3. a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction

$$f(x)=3+4x+\frac{3}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$$

Pour les question 3b 3c, une seule réponse A , B, C est exacte indiquer sur la copie
La lettre correspondant à la réponse choisie .On ne demande pas unejustification
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

b) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse0 est :

Réponse A	*Réponse B*	*Réponse C*
$y=3$	$y=3+4x$	$y=\frac{3}{2}x^2$

c) Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe C est :

Réponse A	*Réponse B*	*Réponse C*
Au dessus de la tangente T pour tout x	Au dessous de la tangente T pour tout x	Au dessous de la tangente T quand $x<0$ et au dessus quand $x>0$

C. Calcul intégral

1. On note $I=\int_{-1}^{1}(2x+2)dx$. Montrer que $I=4$

2.On note $J=\int_{-1}^{1}(x+1)e^x dx$. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J=e+e^{-1}$

3.a) On note $K=\int_{-1}^{1}f(x)dx$, où f est la fonction définie dans la partie B .
Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K .

b) Donner la valeur de K arrondie à 10^{-2} .

c) On admet que pour tout x de l'intervalle $[-1;1]$, $f(x)\geq 0$.
Donner une interprétation graphique d e K .

EXERCICE 2 (8 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans une usine de conditionnement, une machine remplit à la chaîne des bouteilles d'un certain liquide,

A. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans cette partie les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} .
On note E l'événement (une bouteille prélevée au hasard dans un stock important est non-conforme a u cahier des charges . On suppose que la probabilité de E est 0,02.
On prélève au hasard 30 bouteilles dans le stock pour vérification. On suppose que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque prélèvement de 30 bouteilles, associe le nombre de bouteilles non-conformes.

1.a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer $p(X\leq 1)$.

2. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par me loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Y une variable aléatoire suit la loi de Poisson de paramètre λ où λ la valeur obtenue au a).
En utilisant cette variable aléatoire , calculer. la probabilité que dans un tel prélèvement de 30 bouteilles, au plus une bouteille soit non conforme.

Dans ce qui suit, l es résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} .

B. Loi normale

Dans cette partie, on considère une grande quantité de bouteilles devant être livrés à des clients.
On note Z la variable aléatoire qui, à une bouteille prélevée au hasard dans cette livraison, associes sa contenance en centilitres.
On suppose que Z suit la loi normale de moyenne70 et d'écart -type 1.

1. Calculer $p\left(68 \le Z \le 72\right)$.

2. Déterminer le nombre h positif tel que $p\left(70-h \le Z \le 70+h\right)=0,99$.

C. Intervalle de confiance

Une chaine de supermarché réceptionne un lot imposant de bouteilles dont elle souhaite estimer la contenance moyenne .On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 bouteilles dans ce lot.

Soit Z la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 bouteilles ainsi prélevé associe la moyenne des contenances en centilitres des bouteilles de cet échantillon .On suppose que Z suit la loi normale de moyenne inconnue et d'écart -type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$.

Pour l'échantillon prélevé la moyenne obtenues $\overline{x}=70{,}12$.

1. Déterminer un intervalle de confiance centrée en $\overline{x}$ de la moyenne m des contenances des bouteilles de ce lot, avec le coefficient de confiance 95 %. (On arrondira les bornes de l'intervalle à 10^{-2}).
2. On considère l'affirmation suivante: (la moyenne m est obligatoirement dans l'intervalle de confiance Obtenu à la question 1°).
   Cette affirmation est-elle vraie? (Donner l a réponse sans explication).

Correction

EXERCICE 1 (12 points)

A. Résolution d'une équation différentielle

1. La solution générale de $\left(E_0\right)$ est du type $y_0(x)=ke^{-G(x)}$ où k est un nombre réel quelconque et G une primitive de la fonction $g(x)=-1$d'où : $y_0(x)=k\,e^{x}$ avec $k\in\mathbb{R}$
2. On calcule la dérivée de g : $g(x)=xe^{x}+2x+2$. $g'(x)=e^{x}+xe^{x}+2$
   On remplace dans l'équation (E) :
   $g'(x)-g(x)=e^{x}+xe^{x}+2-\left(xe^{x}+2x+2\right)=e^{x}+xe^{x}+2-xe^{x}-2x-2=e^{x}-2x$, donc :
   La fonction g est une solution particulière de l'équation (E).
3. L'ensemble des solutions de (E) s'obtient en additionnait une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation homogène (E0). On obtient alors :
   $y(x)=y_0(x)+y_p(x)=ke^{x}+xe^{x}+2x+2$
4. On choisit $f(x)=ke^{x}+xe^{x}+2x+2$ avec $f(0)=3$ d'où : $f(0)=ke^{0}+2=3 \Leftrightarrow k=3-2=1$
   On obtient k = 1 soit : $f(x)=e^{x}+xe^{x}+2x+2=(x+1)e^{x}+2x+2$.

B. Étude d'une fonction

1. Calcul de la limite en $+\infty$:
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+2\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\right)\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}\right)=+\infty$.(produit des limites)
   On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$ (addition des limites).
2. **Réponse B.**
   Soit $h(x)=f(x)-y=xe^{x}+e^{x}=(x+1)e^{x}$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-y\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}\right)$
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^{x}}\right)=0$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{x}}{x}\right)=+\infty$ (formulaire).
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}\right)=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-y\right)=0$ et par conséquent la droite D d'équation : $y=2x+2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$
3. (a) Le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction exponentielle est :

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Pour la fonction *f*, on obtient alors : $f(x) = (x+1)e^x + 2x + 2 = (x+1)\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)\right) + 2x + 2$.

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

$$f(x) = (x+1)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)\right) + 2x + 2 = x + x^2 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 + x^2\varepsilon(x).$$

$$f(x) = 3 + 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

(b) Réponse B.

Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est donnée par la partie affine (termes de degré inférieur où égal à 1) du développement limité, donc $y = 3 + 4x$)

(c) Réponse A.

On étudie le signe de « l'écart » entre C est T : $f(x) - (3 + 4x) = \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ est du signe de $x^2 \geq 0$ au voisinage de 0 donc positif pour tout x .

partie C

$I = \int_{-1}^{1}(2x+2)dx = \left[x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} = 3 - 1 + 2 = 4$;

$J = \int_{-1}^{1}(x+1)e^x dx = \left[(x+1)e^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}e^x dx = \left[(x+1)e^x - e^x\right]_{-1}^{1} = 2e - e + e^{-1} = e + e^{-1}$

3. a. $K = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(x+1)e^x dx + \int_{-1}^{1}(2x+2)dx = J + I = e + e^{-1} + 4$.

b. $K = \int_{-1}^{1} f(x)dx = e + e^{-1} + 4 \approx 7{,}1$.

c. K désigne l'aire, en unité d'aire, de la portion de plan délimitée par les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe C.

Exercice 2 (8 points)

A. Loi binomiale et loi de Poisson

1. a. Chaque prélèvement est constitué de 30 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise ;

– Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :

– soit le succès : l'événement E, « une bouteille prélevée dans un stock important est non conforme au cahier des charges », de probabilité : $p = p(E) = 0{,}02$,

– soit l'échec : l'événement E, « une bouteille prélevée dans un stock important est conforme au cahier des charges », de probabilité : $q = 1 - p = 0{,}98$.

– La variable aléatoire X mesure le nombre de succès, alors la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}02$.

(b) $p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = C_{30}^{0} \times (0{,}02)^0 \times (0{,}98)^{30} + C_{30}^{1} \times (0{,}02)^1 \times (0{,}98)^{29}$

$p(X \leq 1) = 0{,}5454 + 0{,}3340 = 0{,}879$

2. (a) On a $\lambda = np = 30 \times 0{,}02 = 0{,}6$. Le paramètre de la loi de Poisson vaut $\lambda = 0{,}6$.

(b) $p(Y \leq 1) = p(Y = 0) + p(Y = 1) = \dfrac{e^{-0,6} \times 0{,}6^0}{0!} + \dfrac{e^{-0,6} \times 0{,}6^1}{1!} = 0{,}5488 + 0{,}3293 = 0{,}878$

La probabilité qu'il y ait au plus une bouteille non conforme est de 0, 878.

B. Loi normale

1. La variable aléatoire $T = \dfrac{Z - 70}{1}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. On a donc :

$p(68 \le Z \le 72) = p\left(68-70 \le \dfrac{Z-70}{1} \le 72-70\right) = p(-2 \le T \le 2) = 2\Pi(2)-1 = 2\times 0,9772-1 = 0,95$

$p(70-h \le Z \le 70+h) = p(-h \le T \le h) = 2\Pi(h)-1 = 0,99$. $\Pi(h) = \dfrac{1,99}{2} = 0,995$

Or, d'après la table de la loi normale, $\Pi(2,575) = 0,995$. Donc : $h = 2,575 \approx 2,58$.

<u>Intervalle de confiance</u>

1. C suit la loi normale $\mathrm{N}(70,12;0,1)$. L'intervalle: $I = \left[\overline{x} - t\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}};\overline{x}+t\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}\right]$ est l'intervalle de confiance de la moyenne avec le coefficient de confiance . Ici, il faut alors résoudre

   Avec $2\Pi(t)-1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi(t) = 0,975 \Leftrightarrow t = 1,96$.

   d'où, l'intervalle de confiance centré en $\overline{x}$ de la moyenne μ des contenances des bouteilles de ce lot, avec le coefficient de confiance 95%, est $I = \left[70,12-1,96\times\dfrac{1}{10};70,12+1,96\times\dfrac{1}{10}\right] = [69,92;70,32]$

2. L'affirmation proposée est fausse.!
   (La moyenne est dans l'intervalle de confiance dans 95% *des cas « seulement ».)*

Exercice 2 8 points

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
On considère un système, électrique ou mécanique. On note $e(t)$ le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de

On note $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$ et $S(p) = \mathcal{L}(s(t))$ où $\mathcal{L}$ est la transformation de Laplace.
La fonction de transfert H du système est définie par la relation : $S(p) = H(p)\times E(p)$.
On suppose que pour ce système la fonction de transfert est égale à : $H(p) = \dfrac{2p}{(p+1)^2+1}$

A. Réponse du système à un échelon

On suppose dans cette partie que $e(t) = \mathcal{U}(t)$ où $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & si\ t<0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & si\ t \ge 0 \end{cases}.$$

1. a. Déterminer $E(p)$.

   b. En déduire que $S(p) = \dfrac{2}{(p+1)^2+1}$

2. a. Déterminer, à l'aide du formulaire, $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)$.

   b. En déduire $s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p))$.

B. Recherche d'une pulsation particulière

On appelle « lieu de transfert » l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe $H(j\omega)$ lorsque ω décrit $]0;+\infty[$, où j est le nombre complexe de module1et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

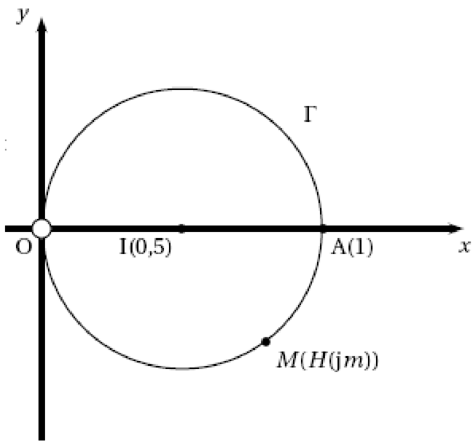
On admet que $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\left(\dfrac{\omega}{2} - \dfrac{1}{\omega}\right)}$.

On propose deux méthodes pour déterminer la pulsation ω pour laquelle le module $\left|H(j\omega)\right|$ est maximal.

Les deux méthodes peuvent être traitées de façon indépendante.

1. Méthode graphique

On admet que le lieu de transfert Γ est le cercle de centre 1 d'affixe 0,5 et de rayon 0,5, privé du point O et représenté sur la figure ci-dessus.



a. Donner la position du point M sur Γ pour laquelle la distance OM est maximale.

b. En déduire la valeur de $H(j\omega)$ pour laquelle le module $\left|H(j\omega)\right|$ est maximal.

c. Déterminer la valeur ω_0 de ! telle que $H(j\omega) = 1$.

2. Méthode analytique

a. On considère la fonction r, définie sur $]0;+\infty[$, par $r(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{2} - \dfrac{1}{\omega}\right)^2}}$

Montrer que, pour tout ω dans l'intervalle $]0;+\infty[$, le module $\left|H(j\omega)\right|$ vaut $r(\omega)$.

b. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant pour la dérivée r' de la fonction r :

$$r'(\omega) = \frac{-2\left(\omega + \sqrt{2}\right)\left(\omega - \sqrt{2}\right)\left(\omega^2 + 2\right)}{\left(\omega^4 + 4\right)^{3/2}}.$$

Ce résultat est admis et ne doit pas être démontré.

Par ailleurs, on admet que la fonction r possède un maximum unique ω_0 sur $]0;+\infty[$.

Déterminer la valeur de ω_0 en utilisant l'expression $r'(\omega)$.

ω_0 est la pulsation de résonance du système.