

TP EQUA DIF -EXPONENTIELLE TERM D 2009-2010

Problème 1

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E): $y' + y = -x - 1$; où y désigne une fonction de la variable x ,

définie et dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

1. a) Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

b) Déterminer la solution h de cette équation différentielle $y' + y = 0$ prenant la valeur $1/e$ en $x = 1$.

2. Déterminer le nombre réel a tel que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{-x} + ax$ soit solution de

l'équation différentielle (E).

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire f

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} - x$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f

Calculer, pour tout réel x , $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. Préciser le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Partie C : Calcul de l'aire d'une partie du plan

La représentation graphique C de la fonction f , dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est tracée sur la

feuille jointe en annexe, qui est à rendre avec la copie.

1. Dans le demi-plan constitué des points d'abscisses positives, hachurer la partie D limitée par la courbe C

l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

2. Calculer en fonction de α la mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie D du plan.

Partie D : Étude d'une fonction g et représentation graphique

La fonction g est définie sur $]-\infty; \alpha[$ par : $g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x}$ (où α désigne le nombre réel trouvé à la

partie B) et on note C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) Vérifier que, pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$ $g(x) = \frac{xe^x}{1 - xe^x}$

b) En déduire la limite de la fonction g en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.

2. En utilisant les résultats trouvés dans la partie B question 4, déterminer la limite de la fonction g en α .

Interpréter graphiquement cette limite.

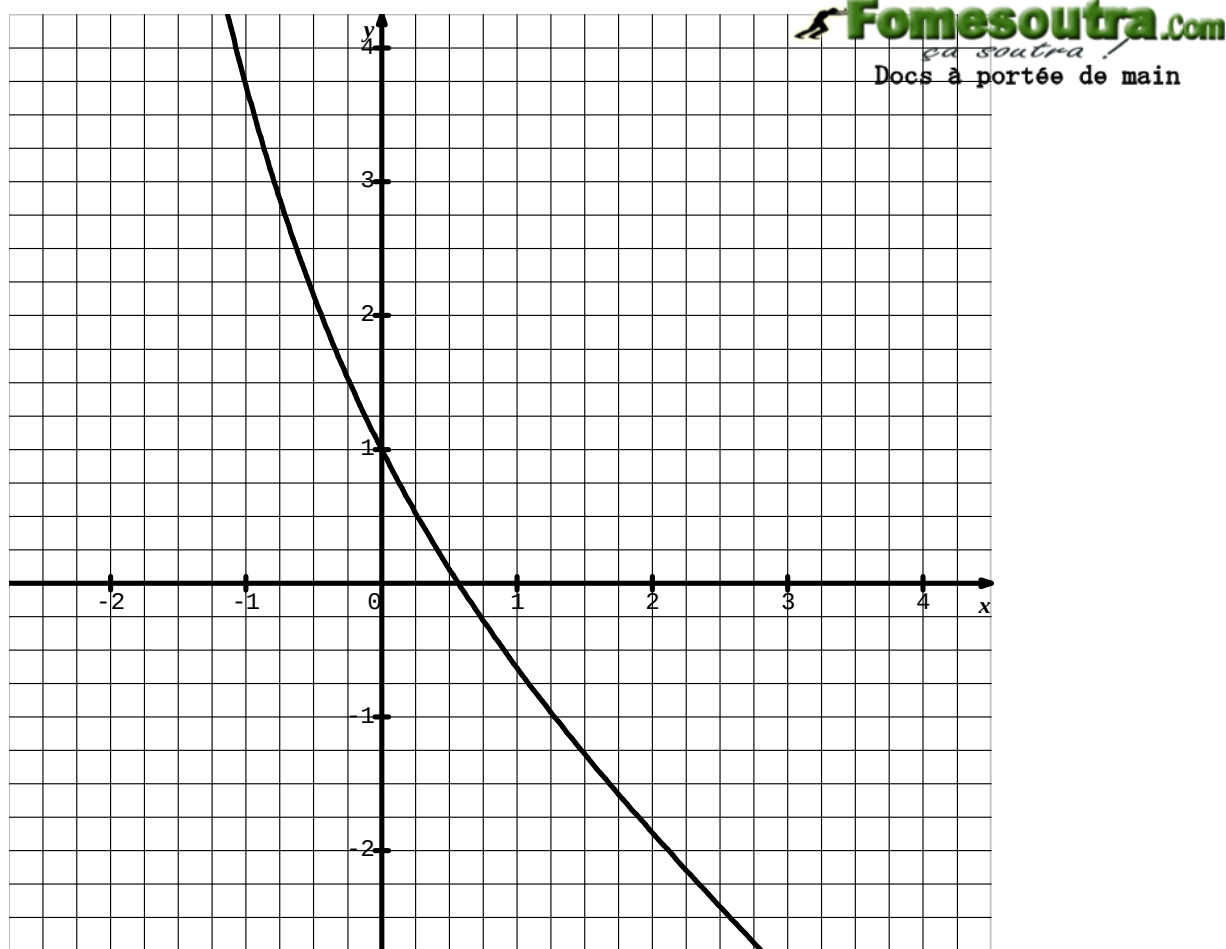
3. a) La fonction g' désignant la dérivée de la fonction g , montrer que pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$:

$$g'(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x} - x)^2}$$

b) En déduire les variations de la fonction g sur $]-\infty; \alpha[$ et dresser le tableau des variations de la

fonction g .

4. Tracer la courbe représentative C_g de la fonction g dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie



PROBLÈME 1. (11 points)

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. L'équation $y' + y = 0$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = -1$, or on sait que les solutions de cette équation sont

des fonctions y définies par $y = k e^{ax} = k e^{-x}$ où k est une constante réelle quelconque.

b) h est une solution de l'équation $y' + y = 0$ donc h est de la forme : $h(x) = k e^{-x}$

$h(1) = 1/e$ d'où $k e^{-1} = \frac{k}{e} = \frac{1}{e}$ par conséquent $k = 1$. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x}$.

2. $u(x) = e^{-x} + ax$ donc pour tout réel x on a : $u'(x) = -e^{-x} + a$. de $u' + u = -x - 1$ on en déduit que pour tout réel x

on a : $-e^{-x} + a + e^{-x} + ax = ax + a = -x - 1$ soit encore : $ax + a = -x - 1$ par identification : $a = -1$.

La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{-x} - x$ est solution de l'équation différentielle (E).

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire f

1. $f(x) = e^{-x} - x$

1. a .

1. b.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2. Pour tout réel x on a : $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ comme somme de deux nombres strictement négatif sur $\mathbb{R}$ f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

3. a) $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ et $f(1) = e^{-1} - 1 = -1 + 1/e < 0$

donc on a $f(0) > 0 > f(1)$ de plus la fonction est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par conséquent : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0 ; 1]$

b) $f(0,56) > 0 > f(0,57)$ donc $0,56 < \alpha < 0,57$ est un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. f est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ et $f(\alpha) = 0$ par conséquent on en déduit le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$: Si x appartient à $[0 ; \alpha[$ alors $f(x) > 0$. Si x appartient à $] \alpha ; 1]$ alors $f(x) < 0$

Partie C : Calcul de l'aire d'une partie du plan

1. Voir figure :

2. L'aire D est délimitée par les droites d'équation $x = 0 ; x = \alpha$, la courbe C_f et l'axe des abscisses.

Sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$; $f(x) \geq 0$ donc l'aire de la partie D en unités d'aire est donnée par :

$$\int_0^\alpha f(x) dx = \left[-e^{-x} - \frac{x^2}{2} \right]_0^\alpha \times u.a = \left(-e^{-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} + e^0 \right) u.a = \left(1 - e^{-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} \right) \times u.a$$

Fomesoutra.com
sa soutra !
Docs à portée de main

On peut aller plus loin sachant que $f(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $e^{-\alpha} - \alpha = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = \alpha$;

$$\int_0^\alpha f(x) dx = \left(1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right) \times u.a$$

partie D : Étude d'une fonction g et représentation graphique

1. a) Pour tout $x \in]-\infty ; \alpha[$: $g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} = \frac{xe^x}{(e^{-x} - x)e^x} = \frac{xe^x}{1 - xe^x}$

b) $g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} = \frac{xe^x}{1 - xe^x}$; $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1 \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe C_g en $-\infty$.

2. $g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} = \frac{x}{f(x)}$; $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \alpha} x = \alpha > 0 \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0^+ \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$

Interprétation graphique : la droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote à la courbe C_g

3. a) Pour tout $x \in]-\infty ; \alpha[$: $g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} = \frac{x}{f(x)}$ $g'(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{f(x)^2} = \frac{e^{-x} - x - x(-e^{-x} - 1)}{(e^{-x} - x)^2} = \frac{(1+x)e^{-x}}{(e^{-x} - x)^2}$

b) $g'(x)$ est du signe de $1+x$ sur $]-\infty ; \alpha[$ (car $(e^{-x} - x)^2 > 0$ et $e^{-x} > 0$ sur $]-\infty ; \alpha[$: $1+x > 0$ si $x > -1$)

On en déduit que sur $]-\infty ; -1]$, $f'(x) \leq 0$ donc f décroissante et sur $]-1 ; \alpha[$, $f'(x) \geq 0$ donc f croissante

