**Problème 1**

**Partie A: Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle $(E): y'+5y=5x^3+3x^2+5$, où $y$ représente une fonction de la variable $x$, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y'+5y=0$.
2. Déterminer deux nombres réels $a$ et $b$ tels que la fonction $u$, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=ax^3+b$, soit solution de l'équation différentielle $(E)$.
3. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=ke^{-5x}+x^3+1$ où $k$ est un nombre réel.
   a) Vérifier que $h$ est solution de l'équation $(E)$.
   b) Déterminer le réel $k$ tel $h(0)=2$.



***Partie B : Étude de la fonction $f$***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-3e^{-5x}+x^3+1$.

1. a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$.
   b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
2. a) On désigne par $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
   b) Établir que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle [0 ; 1].
   c) Donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ du nombre réel $\alpha$.
   d) Déterminer selon les valeurs du réel $x$, le signe de $f(x)$.

***Partie C : Courbe représentative de la fonction $f$***

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 8 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=x^3+1$. La représentation graphique $\Gamma$ de la fonction $u$, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est tracée sur la feuille jointe en annexe.
   a) On pose, pour tout réel $x$ $d(x)=f(x)-u(x)$.
   Étudier le signe de $d(x)$.
   b) En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la courbe $\Gamma$.
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera dans chaque cas la valeur décimale arrondie au centième de $f(x)$.

| $x$ | $-0,2$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | |

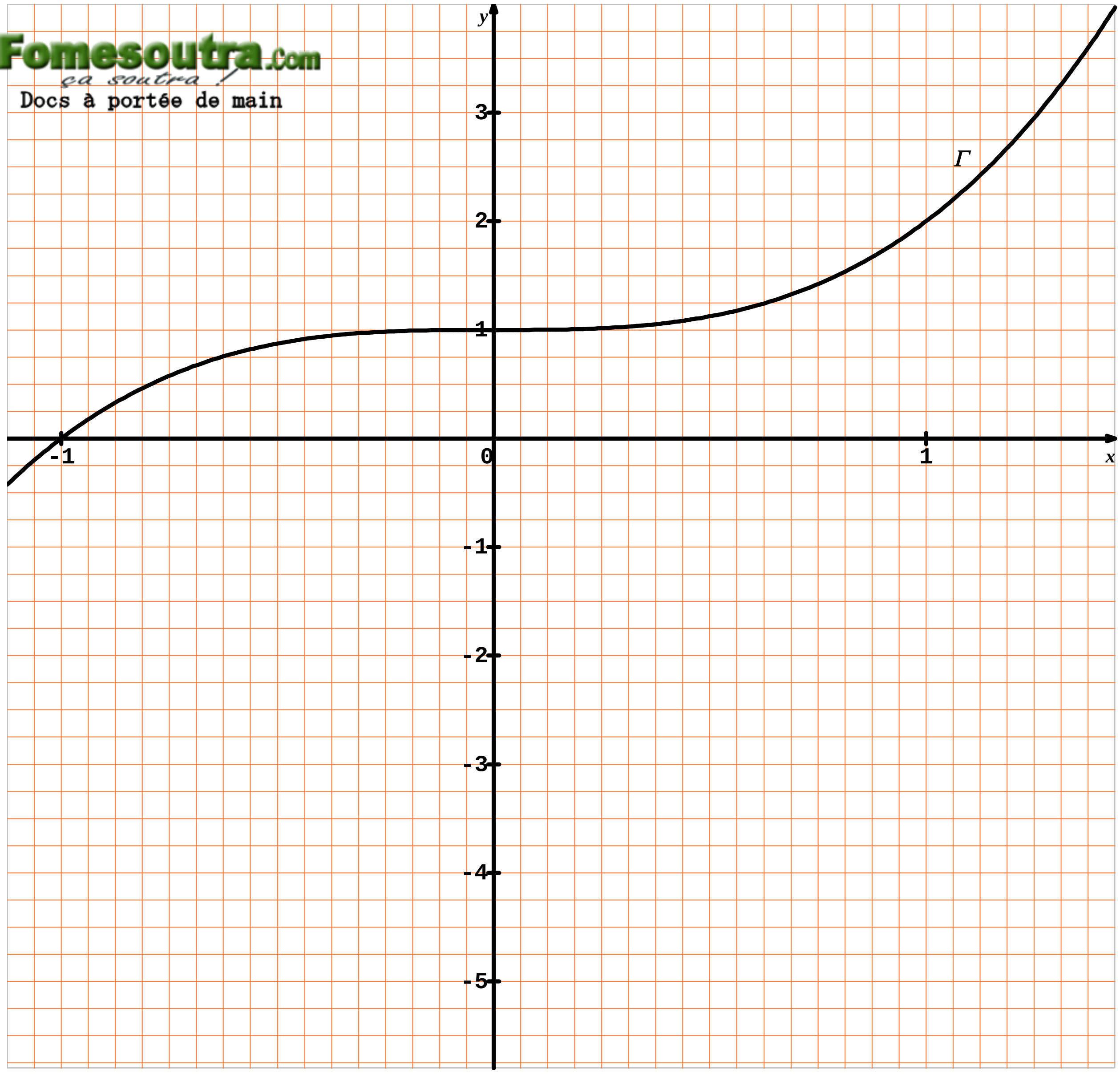
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

***Partie D : Calcul d'une aire***

On appelle $\mathcal{P}$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1/2$ et $x=1$.

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie $\mathcal{P}$ du plan.
2. Calculer la mesure, en unités d'aire, de l'aire $A$ de la partie $\mathcal{P}$ du plan.
   Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE DU PROBLÈME À REMETTRE AVEC LA COPIE





**Problème 1**

**Partie A**

1. équation différentielle ( $E_0$ ) est une équation différentielle de premier ordre , linéaire , de la forme $y' = a\,y$ , la solution générale de cette équation est de la forme $y = C\,e^{ax}$ ,avec C réel
   On a : $y' = -5\,y$ , la solution générale est $y = C\,e^{-5x}$ avec C réel.
2. soit $u(x) = ax^3 + b$ , alors $u'(x) = 3ax^2$ . Si $u$ est solution de l'équation différentielle (E ) , alors $u$ vérifie l'équation ( E ). Donc $u'(x) + 5u(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5$ , $3ax^2 + 5(ax^3 + b) = 5x^3 + 3x^2 + 5$
   $5(a-1)x^3 + 3(a-1)x^2 + 5(b-1) = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0\, et\, b - 1 = 0$ , donc $a = 1$ et $b = 1$.
   Par conséquent la fonction $u$ est définie sur R par $u(x) = x^3 + 1$ .

3.a. $h(x) = Ce^{-5x} + x^3 + 1$, donc $h'(x) = -5Ce^{-5x} + 3x^2$ et $h'(x) + 5h(x) = -5Ce^{-5x} + 3x^2 + 5Ce^{-5x} + 5x^3 + 5 = 5x^3 + 3x^2 + 5$
   Donc la fonction h est bien une solution de l'équation différentielle ( E ) .
   b. $h(0) = Ce^0 + 0 + 1 = -2 \Leftrightarrow C + 1 = -2 \Leftrightarrow C = -3$ et on a : $h(x) = -3e^{-5x} + x^3 + 1$ .

***Partie B***

1.a. limite en $+\infty$ . $f(x) = -3e^{-5x} + x^3 + 1$

On pose $u(x) = -5x$ .On sait que : $\lim\limits_{x \to -\infty} u = \lim\limits_{x \to -\infty} -5x = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} e^u = +\infty$ , donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -3e^{-5x} = -\infty$ .

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ .on déduit par composition et somme de limites que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ .

2. limite en $+\infty$ : $\lim\limits_{x \to +\infty} u = \lim\limits_{x \to +\infty} -5x = -\infty$ et $\lim\limits_{u \to -\infty} e^u = 0$ ,donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -3e^{-5x} = 0$ . $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ .

on déduit par somme de limites que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a . La fonction $f$ est dérivable comme somme des fonction dérivables donc on a : $f'(x) = 15e^{-5x} + 3x^2$

b. On sait que $x^2 > 0$, donc $3x^2 > 0$, de plus $15e^{-5x} > 0$, puisque $e^{-5x} > 0$ pour tout réel $x$.On déduit que $f'(x) > 0$, pour tout réel $x$ et par conséquent la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ .

3.a $f(0) = -3e^0 + 0 + 1 = -3 + 1 = -2$ et $f(1) = -3e^{-5} + 1 + 1 = -3e^{-5} + 2$.

b. On sait que la fonction $f$ est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est aussi strictement croissante sur $[0;1] \subset \mathbb{R}$, de plus $f(0) = -2 < 0$ et $f(1) = -3e^{-5} + 2 \approx 1{,}98 > 0$, donc $0 \in [f(0); f(1)]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires : l'équation $f(x)$ admet une solution unique $\alpha$ .
telle que $f(\alpha) = 0$ et $\alpha \in [0;1]$.

c. à l'aide de la calculatrice on a à $10^{-2}$ près $f(0{,}21) \approx -0{,}04 < 0$ et $f(0{,}22) \approx 0{,}01 > 0$, donc $0{,}21 \leq \alpha \leq 0{,}21$ , puisque $f$ est strictement croissante sur $[0;1] \subset \mathbb{R}$.

d. signe de $f(x)$. comme $f$ est strictement croissante sur $[0;1] \subset \mathbb{R}$, donc $f(x) < 0$ sur $]-\infty; \alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

***Partie C***

1. a .Pour tout réel $x$, on pose $d(x) = f(x) - u(x) = -3e^{-5x}$. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et par conséquent $-3e^{-5x} < 0$. On déduit que $d(x) < 0$ pour tout réel $x$ .

1.b. puisque $d(x) < 0$ , on conclut que la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la courbe $\Gamma$.

2. tableau de valeurs

| $x$ | $-0,2$ | $0$ | $0,2$ | $0,4$ | $0,6$ | $0,8$ | $1$ | $1,2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-7,16$ | $-2$ | $-0,1$ | $0,66$ | $1,07$ | $1,46$ | $1,98$ | $2,72$ |

3.voir graphique

***Partie D***

2. Sur $[1/2;1]$, $f(x) > 0$, donc l'aire de la partie hachurée , en unité d'aire est égale à

$$\mathcal{A} = \left(\int_{1/2}^{1} f(x)dx\right)u.a = \left(\left[F(x)\right]_{1/2}^{1}\right)u.a \quad . \quad \mathcal{A} = \left[F(1) - F(1/2)\right]u.a$$

$f(x) = -3e^{-5x} + x^3 + 1$ , alors $F(x) = \frac{3}{5}e^{-5x} + \frac{1}{4}x^4 + x$ et $F(1) = \frac{3}{5}e^{-5} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{5}e^{-5} + \frac{5}{4}$ ,

$F(1/2) = \frac{3}{5}e^{-5/2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}e^{-5/2} + \frac{33}{64}$. Donc $\mathcal{A} = \left(\frac{3}{5}e^{-5} + \frac{5}{4} - \frac{3}{5}e^{-5/2} - \frac{33}{64}\right)u.a = \left(\frac{3}{5}e^{-5} - \frac{3}{5}e^{-5/2} + \frac{47}{64}\right)u.a$