

Corrigé

➤ Problème 4

1) pour tout réel $x \neq 0$ et $x \neq -1$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{2x + 2} = \frac{x^2 \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right]}{x \left[2 + \frac{2}{x} \right]} = \frac{x \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right]}{2 + \frac{2}{x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{2}{x} = 2 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{2}{x} = 2 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - x + 2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x + 2 = 0^- \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - x + 2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x + 2 = 0^+ \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$



Des deux dernières limites, on en déduit que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à C_f

$$2) f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{2x + 2} = \frac{u(x)}{v(x)} \quad u(x) = x^2 - x + 2 \Rightarrow u'(x) = 2x - 1 \quad v(x) = 2x + 2 \Rightarrow v'(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(2x+2) - 2(x^2 - x + 2)}{(2x+2)^2} = \frac{4x^2 + 4x - 2x - 2 - 2x^2 + 2x - 4}{(2x+2)^2}; \quad f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{(2x+2)^2} = \frac{2(x^2 + 2x - 3)}{(2x+2)^2}$$

3) $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 3$ car $(2x+2)^2 > 0$ sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ donc deux racines réelles pour $x^2 + 2x - 3$:

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad f(-3) = \frac{(-3)^2 - (-3) + 2}{2(-3) + 2} = \frac{9+3+2}{-6+2} = \frac{14}{-4} = -\frac{7}{2} \quad f(1) = \frac{1-1+2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Calcul des extremums :

$$4) f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) = \frac{x^2 - x + 2}{2x + 2} - \frac{x-2}{2}$$

$$= \frac{x^2 - x + 2 - (x-2)(x+1)}{2x+2}$$

$$= \frac{x^2 - x + 2 - (x^2 - x - 2)}{2x+2} = \frac{4}{2x+2}$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -7/2$	$\searrow -\infty$	$\nearrow +\infty$	1	$\nearrow +\infty$
				$\searrow 1/2$		

tableau de
variation de
 f :

donc la droite d'équation

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 2 = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) = 0$$

position de la courbe C_f par rapport à l'asymptote (D') :

$2x + 2 < 0$ si et seulement si $x < -1$; $2x + 2 > 0$ si et seulement si $x > -1$

donc sur l'intervalle $]-\infty; -1[$, C_f est strictement au dessous de la droite (D')

et sur l'intervalle $]-1; +\infty[$, C_f est strictement au dessus de la droite (D')

$$5) f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{2x + 2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$$

la droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe en deux points A et B de coordonnées A(0 ; 1) et B(3 ; 1).

$$6) \text{ Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 : } f'(0) = \frac{2 \times (-3)}{2^2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

l'ordonnée du point A est $f(0) = 1$ d'après la question 5)

Equation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$; $(T_A): y = \frac{-3}{2}x + 1$

7) soit x l'abscisse d'un point éventuel où la tangente est parallèle à (T_A) deux droites sont parallèles (où confondues) si leurs coefficients directeurs sont égaux :

$$f'(x) = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4x - 6}{(2x + 2)^2} = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow -3(2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x - 12$$

$$\Leftrightarrow -3(4x^2 + 8x + 4) = 4x^2 + 8x - 12 \Leftrightarrow -12x^2 - 24x - 12 = 4x^2 + 8x - 12$$

$$\Leftrightarrow -16x^2 - 32x = 0 \Leftrightarrow -16x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ où } x = -2$$

on retrouve l'abscisse du point A et l'abscisse d'un autre point : $x = -2$

$$\text{calculons l'ordonnée de ce point : } f(-2) = \frac{(-2)^2 + 2 + 2}{2(-2) + 2} = \frac{8}{-2} = -4$$

il existe un autre point de C_f où la tangente est parallèle à (T_A)

c'est le point de coordonnées $(-2 ; -4)$.

